立命館大学経済学研究科
博士前期課程 2 回生
波床貴明
初稿 2017/04/11,改稿 2017/05/14

Blanchard and Kahn (1980)に関する研究ノート
線形差分方程式マクロ経済モデルの合理的期待解[1]

はじめに

Blanchard and Kahn (1980)は,合理的期待(rational expectation)下における一階の線形差分方程式体系に,ユニークな解が存在するための条件を提示し,解がどのように表現されるのかということを示した論文である。合理的期待下で,かつ一階の線形差分方程式体系と聞くと,あまり有用性を感じないかもしれない。しかしながら,マクロ経済学において採用されている経済主体の期待形成は,基本的に合理的期待である。さらに,対数線形近似等の手法を用いることにより,複雑な差分方程式体系でも,一階の線形差分方程式体系にすることが可能である。このため適応範囲は広く,マクロ経済学の様々な分野で,Blanchard and Kahn (1980)の内容は利用されている。[2]

本稿は Blanchard and Kahn (1980)に関する研究ノートである。本稿の内容は以下の通りである。まず Blanchard and Kahn (1980)において,議論の対象となるモデルについて整理する。次に Blanchard and Kahn の条件(Blanchard and Kahn conditions)と呼ばれるものを説明し,モデルにユニークな解が存在するのは,どのような時であるのか,またそのような解(合理的期待解)が存在するのであれば,どのように表すことが出来るのかということについて議論する。最後に Blanchard and Kahn (1980)の内容に関する理解を深めるために,Blanchard and Kahn (1980)で取り上げられている例を用いて,実際に合理的期待解を導出することを試みる。

モデルについて

---

1 本稿作成に関して,青木芳将氏(立命館大学),松尾匡氏(立命館大学)から有益なコメントを頂いた。記して感謝申し上げる。言うまでもないが,本稿において有り得る誤記・誤謬等は,すべて筆者の責任に帰する。
2 例えば「Google Scholar Citations」で,Blanchard and Kahn (1980)の引用先を調べると,2017/05/14 の時点で,2522 という数字となっている。https://scholar.google.com/citations?user=QtVE6DwAAAAJ&hl=ja. 最終閲覧日 2017/05/14.

Blanchard and Kahn (1980)において議論の対象となるモデルは,$(1a)$~$(1c)$式によって特徴付けられる。まず,

$$(1a)\qquad \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ {}_tP_{t+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t \quad X_{t=0} = X_0$$

ここで,X_tは$(n \times 1)$のt期における先決変数(predetermined variable)列ベクトル,P_tは$(m \times 1)$のt期における非先決変数(non-predetermined variable)列ベクトル, ${}_tP_{t+1}$はt期において形成されるP_{t+1}の期待値,Z_tは$(k \times 1)$のt期における外生変数(exogenous variable)列ベクトル,Aは$(n+m) \times (n+m)$の行列,γは$(n+m) \times k$の行列である。$(1a)$式は,モデルが一階の線形差分方程式体系であるということを述べている。次に,

$$(1b)\qquad {}_tP_{t+1} = E(P_{t+1}|\Omega_t)$$

$E(\cdot)$は期待値オペレーターで,Ω_tはt期における情報集合である。$(1b)$式は,期待形成が合理的期待であるということを述べている。[3]最後に,

$$(1c)\qquad \forall t \ \exists \bar{Z}_t \in \mathbb{R}^k, \qquad \theta_t \in \mathbb{R}$$

$$such\ that \quad -(1+i)^{\theta_t}\bar{Z}_t \le E(Z_{t+i}|\Omega_t) \le (1+i)^{\theta_t}\bar{Z}_t \quad \forall i \ge 0$$

$(1c)$式は,非発散条件(non-explosion condition)で,将来の外生変数に関する期待値が極端な値となることを排除するものである。外生変数が急激に成長するということを排除するものである,と言い換えることも出来る(例えば,技術の極度の発展もしくは衰退)。

以上が Blanchard and Kahn (1980)において,議論の対象となっているモデルの内容である。ここで議論の対象となっているのは,一階の線形差分方程式体系である。しかしながら,以下で述べるような手順を踏むことにより,たとえ一階の線形差分方程式体系でなかったとしても,一階の線形差分方程式体系にすることが可能である。以下のような差分方程式を考えよう。[4]

$$Y_t + \alpha Y_{t-2} + \beta Y_{t+2} = Z_t$$

ここで,以下のように定義する。

$$XI_t \equiv Y_{t-1}$$

$$X2_t \equiv XI_{t-1} = Y_{t-2}$$

$$P_t \equiv {}_tY_{t+1} \Rightarrow {}_tP_{t+1} = {}_t({}_{t+1}Y_{t+2}) = {}_tY_{t+2}$$

[3] $(1b)$式を解釈すると,t期において保有している情報を用いて,$t+1$期の値を予想するということであるが,t期において保有している情報の中には,$t+1$期における変数の値も存在している。この値は,$t+1$期において実際に実現するかどうかは不明である。実現した場合は,実際の非先決変数の値と予想した非先決変数の値は一致する。しかし実現しなかった場合は一致しない。そのため$(1a)$式において,非先決変数に関するP_{t+1}と ${}_tP_{t+1}$の区別は重要である。他方,先決変数の値は,現在と過去の値より将来の値が決定してしまうものであるため,変数が実現する,しないにかかわらず,実際の先決変数の値と予想した先決変数の値は一致する。よって,$(1a)$式において区別の必要がなく,$X_{t+1} = {}_tX_{t+1}$となる。

[4] 以下の議論で使用している例は,Blanchard and Kahn(1980)において紹介されているものである。勿論,以下で述べるような手順を踏んでも,一階の線形差分方程式体系にすることが出来ない差分方程式体系も存在する。詳しくは Blanchard and Kahn(1980)を参照。

すると,上述の方程式は,

$$XI_{t+1} = Y_t$$
$$X2_{t+1} = XI_t$$
$${}_tY_{t+1} = P_t$$
$${}_tP_{t+1} = -\frac{\alpha}{\beta}X2_t - \frac{1}{\beta}Y_t + \frac{1}{\beta}Z_t$$

と書き直すことが出来[5],これを行列表記にすれば,

$$\begin{bmatrix} XI_{t+1} \\ X2_{t+1} \\ {}_tY_{t+1} \\ {}_tP_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} XI_t \\ X2_t \\ Y_t \\ P_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} Z_t$$

となる。ここで,$XI_t, X2_t$はt期における先決変数,Y_t, P_tはt期における非先決変数である。これで一階の線形差分方程式体系でない差分方程式を,一階の線形差分方程式体系にすることが出来た。

Blanchard and Kahn の条件と合理的期待解

さて,$(1c)$式は外生変数に関する非発散条件であったが,先決変数・非先決変数に関しても,同様の条件を付与することが出来る。すなわち,

$$(1d) \qquad \forall t \ \exists \begin{bmatrix} \overline{X_t} \\ \overline{P_t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \sigma_t \in \mathbb{R}$$

$$such\ that \quad -(1+i)^{\sigma_t} \begin{bmatrix} \overline{X_t} \\ \overline{P_t} \end{bmatrix} \leq E \begin{bmatrix} E(X_{t+i}|\Omega_t) \\ E(P_{t+i}|\Omega_t) \end{bmatrix} \leq (1+i)^{\sigma_t} \begin{bmatrix} \overline{X_t} \\ \overline{P_t} \end{bmatrix} \quad \forall i \geq 0$$

である。

次に,重要な概念と仮定を導入しよう。行列Aは,以下のような形に分解することが出来る。

$$A = C^{-1}JC$$

ここで,JはAの固有値を対角要素とする行列で,ジョルダン行列と呼ばれているものである。

---

[5] 最後の式は,以下のように導出される。

$$Y_t + \alpha Y_{t-2} + \beta Y_{t+2} = Z_t$$

であるから,上述の定義より,

$$Y_t + \alpha X2_t + \beta \ {}_tP_{t+1} = Z_t$$

となる。${}_tP_{t+1}$について解けば,

$${}_tP_{t+1} = -\frac{\alpha}{\beta}X2_t - \frac{1}{\beta}Y_t + \frac{1}{\beta}Z_t$$

となる。

[6] さらに,Jは$J=\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$と分解することが出来る。ただし,$J_1$は絶対値が1以下の固有値を対角要素とする$(\bar{n}\times\bar{n})$の行列,$J_2$は絶対値が1より大きい固有値を対角要素とする$(\bar{m}\times\bar{m})$の行列である。[7] Cは$C\equiv\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$で固有ベクトル行列,ただし$C_{11}$は$(\bar{n}\times n)$,$C_{12}$は$(\bar{n}\times m)$,$C_{21}$は$(\bar{m}\times n)$,$C_{22}$は$(\bar{m}\times m)$の行列である。$C^{-1}$は$C^{-1}\equiv\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$で$C$の逆行列,ただし$B_{11}$は$(n\times\bar{n})$,$B_{12}$は$(n\times\bar{m})$,$B_{21}$は$(m\times\bar{n})$,$B_{22}$は$(m\times\bar{m})$の行列である。$\gamma$も二つの構成要素に分解され,$\gamma=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$となる。ただし$\gamma_1$は$(\bar{n}\times k)$,$\gamma_2$は$(\bar{m}\times k)$の行列である。そして,$C_{22}$はフルランクであると仮定する。この時,以下の定理が成立する。

●定理1
$\bar{m}=m$の時,つまり1より大きい固有値の数と非先決変数の数が同じである場合,ユニークな解が存在する。

$\bar{m}=m$という条件を,Blanchard and Kahn の条件とも呼ぶ。なお$\bar{m}=m$という条件は,経済成長論等において「鞍点」として論じられているものに関係している。実際,この定理はユニークな合理的期待解存在の必要十分条件が,行列Aが鞍点的性質を有する事である,ということを述べている。また,以下の二つの定理も成立する。

●定理2
$\bar{m}>m$の時,つまり1より大きい固有値の数が非先決変数の数より多い場合,解は存在しない。
●定理3
$\bar{m}<m$の時,つまり1より大きい固有値の数が非先決変数の数より少ない場合,解は複数存在する。

さて,定理1によれば$\bar{m}=m$の時,合理的期待解はユニークに存在する。この時,合理的期待解はどのように表すことが出来るのだろうか。Blanchard and Kahn (1980)によれば合理的期待解は,以下の(2), (3)式で表すことが出来る。[8]

---

[6] ジョルダン行列については,松坂 (1980, 8.9 節)や Stokey and Lucas with Prescott (1989, Section 6.3)を参照。
[7] 本稿の初稿において,「Jは固有値行列,J_1は絶対値が1以下の固有値を構成要素とする対角行列,J_2は絶対値が1より大きい固有値を構成要素とする対角行列である」というように記述していたが,正しくは本文中の通りである(ただし以降の論理展開や結論に対して,影響・変更等はない)。訂正し,お詫び申し上げる。
[8] (2), (3)式の導出に関しては,付録を参照。

(2) $X_t = X_0 \quad for\ t = 0$

$$= B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1}$$

$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1}) \quad for\ t > 0$$

(3) $P_t = -C_{22}^{-1}C_{21}X_t - C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t) \quad for\ t \geq 0$

逐次代入を繰り返すことにより,最終的な解(4), (5)式を,以下のように得ることが出来る。[9]

(4)
$$X_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\left(Z_{t-j+i}\middle|\Omega_{t-j}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{11}J_1^{t}B_{11}^{-1}X_0 \quad for\ t > 0$$

(5)
$$P_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\left(Z_{t-j+i}\middle|\Omega_{t-j}\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} C_{22}^{-1}J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t)$$

$$+\sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{21}J_1^{t}B_{11}^{-1}X_0 \quad for\ t \geq 0$$

合理的期待解の例

ここまで,モデルに解が存在するのは,どのような時か,また解が存在するのであれば,どのように表すことが出来るのかということについて議論した。ここまで議論した内容について理解を深めるために,具体例を用いて,実際に合理的期待解を導出してみることが望ましい。しかしながら,基本的に手計算で合理的期待解を導出する事は困難である(つまり基本的に,解の導出はコンピュータ頼り)。しかし以下のような例を考える。

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ {}_tp_{t+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_t \\ p_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t$$

ここで,Aは$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$で$(2 \times 2)$の行列,$\gamma$は$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$で$(2 \times k)$の行列,$\gamma_1, \gamma_2$は$(1 \times k)$の行ベクトル,$Z_t$は$(k \times 1)$の列ベクトルである。つまり,先決変数と非先決変数が共に一つの場合である。この場合は手計算で解くことが出来る。この例を用いて合理的期待解を導出して

[9] (4), (5)式の導出に関しては,付録を参照。

みよう。行列Aは以下のように分解することが出来る。

$$A = C^{-1}JC$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

ここで,Jは$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$で$(2 \times 2)$の固有値行列,ただし$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$,$C$は$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$で$(2 \times 2)$の固有ベクトル行列,$C^{-1}$は$C^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$で$(2 \times 2)$の固有ベクトル行列の逆行列である。この一階の線形差分方程式体系における合理的期待解は,

$$(6) \qquad x_t = x_0 \quad for\ t = 0$$
$$= \lambda_1 x_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} E(Z_{t+i-1} | \Omega_{t-1}) \quad for\ t > 0$$
$$(7) \qquad p_t = a_{12}^{-1} \left\{ (\lambda_1 - a_{11}) x_t + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} E(Z_{t+i} | \Omega_t) \right\} \quad for\ t \geq 0$$

となる。ここで,$\mu \equiv (\lambda_1 - a_{11})\gamma_1 - a_{12}\gamma_2$である。[10]

おわりに

本稿では Blanchard and Kahn (1980)によって示された,一階の線形差分方程式体系がユニークな合理的期待解を持つための条件である Blanchard and Kahn の条件,および合理的期待解の導出に関する議論を行った。マクロ経済学の分野で広く利用されている Blanchard and Kahn (1980)の内容を理解することは重要である。しかしながら,本稿は Blanchard and Kahn (1980)の内容に関する議論に留まり,実際にマクロ経済学の分野において,どのように Blanchard and Kahn (1980)の内容が利用されているのかについて議論が出来なかった。Blanchard and Kahn (1980)の内容はあくまで,モデルの解法であり,その解法の実際の利用を知ることの方が重要であるということは,言うまでもない。そのため Blanchard and Kahn (1980)の内容の,マクロ経済学における実際の利用については,別の機会に改めて議論したいと考えている。

付録

導出のための準備

ここでは,(2)~(7)式の導出を行う。[11]まず (2), (3)式を導出し,その後(4), (5)式を導出,最後

[10] (6), (7)式の導出に関しては,付録を参照。なお Blanchard and Kahn (1980)では,$\mu \equiv (\lambda_1 - a_{11})\lambda_1 - a_{12}\lambda_2$と表記されていたが,誤植であると考えられる。Kollmann and Zeugner (2016)を参照。

に(6), (7)式を導出するという順番で行う。[12]まず,導出を行う過程で使用する様々な式および公式を準備する事から始めよう。モデルは$(1a)$~$(1c)$式で与えられていた。そこで,まずt期における$t+i$期の期待値をとる。すると$(1a)$式は,

$$(A1)\qquad \begin{bmatrix} {}_tX_{t+i+1} \\ {}_tP_{t+i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} {}_tX_{t+i} \\ {}_tP_{t+i} \end{bmatrix} + \gamma_t Z_{t+i}$$

となる。そして,

$$(A2)\qquad \begin{bmatrix} Y_t \\ Q_t \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix}$$

とする。$(A2)$式は,

$$(A3)\qquad Y_t = C_{11}X_t + C_{12}P_t$$

$$(A4)\qquad Q_t = C_{21}X_t + C_{22}P_t$$

である。ここで,$(A1)$式の両辺に左からCをかけて,$(A2)$式および$CA=JC$の関係式を用いると,

$$(A5)\qquad \begin{bmatrix} {}_tY_{t+i+1} \\ {}_tQ_{t+i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_tY_{t+i} \\ {}_tQ_{t+i} \end{bmatrix} + C\gamma_t Z_{t+i}$$

となる。$(A5)$式は,

$$(A6)\qquad {}_tY_{t+i+1} = J_1\ {}_tY_{t+i} + (C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)_t Z_{t+i}$$

$$(A7)\qquad {}_tQ_{t+i+1} = J_2\ {}_tQ_{t+i} + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i}$$

である。$(A6)$, $(A7)$式の内,問題となるのが$(A7)$式,すなわちQ_tで,非発散条件が満たされているならば,J_2を構成する要素によりQ_tは,

$$(A8)\qquad Q_t = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i}$$

とならなければならない。[13]次に$(A2)$式の両辺に左からC^{-1}をかけると,

---

[11] 式の展開を詳しく記述したため,冗長と感じられるかもしれないが,ご容赦願いたい。

[12] (2), (3)式の導出は矢野(2005),(6), (7)式の導出は Kollmann and Zeugner (2016)を参考にしている。

[13] $(A8)$は以下のように導出される。$(A7)$より,

$$(\alpha)\qquad {}_tQ_{t+1} = J_2 Q_t + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_t$$

$$(\beta)\qquad {}_tQ_{t+2} = J_2\ {}_tQ_{t+1} + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+1}$$

となる。これらは,

$$(\alpha 1)\qquad Q_t = -J_2^{-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_t + J_2^{-1}\ {}_tQ_{t+1}$$

$$(\beta 1)\qquad {}_tQ_{t+1} = -J_2^{-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+1} + J_2^{-1}\ {}_tQ_{t+2}$$

となる。$(\beta 1)$を,$(\alpha 1)$に代入して整理すると,

$$Q_t = -J_2^{-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_t - J_2^{-2}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+1} + J_2^{-2}\ {}_tQ_{t+2}$$

となる。同様の手続きを繰り返すと,

$$Q_t = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i} + \lim_{i\to\infty} J_2^{-i}\ {}_tQ_{t+i}$$

となる。非先決変数に関する非発散条件$(1d)$式と,J_2を構成する要素より,$\lim_{i\to\infty} J_2^{-i}\ {}_tQ_{t+i} = 0$ である。よって,

$$\begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} Y_t \\ Q_t \end{bmatrix}$$

となる。この式は,

(A9) $$X_t = B_{11}Y_t + B_{12}Q_t$$

(A10) $$P_t = B_{21}Y_t + B_{22}Q_t$$

である。以上で,導出過程で用いる式についての説明は終了であるが,これらの式に加えて,以下の六つの公式を使用する。まずC_{22}がフルランクであるという仮定,そして$\bar{m} = m$という事から,C_{22}^{-1}が存在することに注意しよう。さらに,B_{11}がフルランクで,B_{11}^{-1}が存在する。この時,

公式 1 $$B_{11} = (C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21})^{-1}$$

公式 2 $$B_{12} = -B_{11}C_{12}C_{22}^{-1}$$

公式 3 $$B_{21} = -C_{22}^{-1}C_{21}B_{11}$$

が成り立つ。[14]ここで,公式2の両辺に,左からB_{11}^{-1}をかけ,整理すると,

公式 4 $$-B_{11}^{-1}B_{12} = C_{12}C_{22}^{-1}$$

となる。また公式4の両辺に,左からB_{11}をかけ,右からC_{22}をかけて,整理すると,

公式 5 $$B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} = O$$

となる。ここで,Oは$(n \times m)$の零行列である。また定義より$C^{-1}C = I$(Iは単位行列)であるから,

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

(A11) $$\begin{bmatrix} B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} \\ B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

である。ここで,I_1は$(n \times n)$,I_2は$(m \times m)$の単位行列である。(A11)式より,

公式 6 $$B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} = I_1$$

が得られる。以上で,(2)~(7)式を導出するために使用する式および公式の準備は終了である。

(3)式の導出

ここから(2)~(7)式を導出していく。まず(3)式の導出から行おう。(A4)式に(A8)式を代入すると,

(A12) $$-\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i} = C_{21}X_t + C_{22}P_t$$

となる。(A12)式の両辺に左からC_{22}^{-1}をかけて整理すると,

$$Q_t = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i}$$

となる。

[14] これらの公式については,宮岡・眞田 (2007, 2.1 節)を参照。

(A13) $$P_t = -C_{22}^{-1}C_{21}X_t - C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)_t Z_{t+i}$$

となる。ここで,$(1b)$式を用いると,$(A13)$式は,

$$P_t = -C_{22}^{-1}C_{21}X_t - C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t)$$

となるため(3)式が導出された。

(2)式の導出

続けて(2)式を導出する。$(A6)$式より,

(A14) $$Y_t = J_1\,Y_{t-1} + (C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1}$$

となる。また$(A9)$式の両辺に左からB_{11}^{-1}をかけ,整理すると,

(A15) $$Y_t = B_{11}^{-1}(X_t - B_{12}Q_t)$$

となる。また$(A15)$式より,

(A16) $$Y_{t-1} = B_{11}^{-1}(X_{t-1} - B_{12}Q_{t-1})$$

である。$(A15)$, $(A16)$式を$(A14)$式に代入すると,

$$B_{11}^{-1}(X_t - B_{12}Q_t) = J_1B_{11}^{-1}(X_{t-1} - B_{12}Q_{t-1}) + (C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1}$$

となる。この式の両辺に左からB_{11}をかけ,整理すると,

(A17) $$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}(X_{t-1} - B_{12}Q_{t-1}) + B_{12}Q_t + B_{11}(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1}$$

となる。ここで,公式4を用いて$(A17)$式を整理すると,

(A18) $$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + B_{11}J_1C_{12}C_{22}^{-1}Q_{t-1} + B_{12}Q_t + B_{11}(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1}$$

となる。また $(A7)$式より,

(A19) $$Q_t = J_2Q_{t-1} + (C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_{t-1}$$

である。$(A19)$式を$(A18)$式に代入すると,

$$\begin{aligned} X_t = {} & B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + B_{11}J_1C_{12}C_{22}^{-1}Q_{t-1} + B_{12}J_2Q_{t-1} + B_{12}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_{t-1} \\ & + B_{11}(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1} \end{aligned}$$

となるが,ここで,$B_{12}J_2Q_{t-1} = B_{12}J_2C_{22}C_{22}^{-1}Q_{t-1}$という関係式を用いて,この式を整理すると,

$$\begin{aligned} X_t = {} & B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + B_{11}J_1C_{12}C_{22}^{-1}Q_{t-1} + B_{12}J_2C_{22}C_{22}^{-1}Q_{t-1} + B_{12}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)Z_{t-1} \\ & + B_{11}(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)Z_{t-1} \\ = {} & B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \{B_{11}(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2) + B_{12}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)\}Z_{t-1} + (B_{11}J_1C_{12} \\ & + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}Q_{t-1} \\ = {} & B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \{(B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21})\gamma_1 + (B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22})\gamma_2\}Z_{t-1} + (B_{11}J_1C_{12} \\ & + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}Q_{t-1} \end{aligned}$$

となる。公式5と公式6を用いて,さらに整理すると,最終的に,

(A20) $$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \gamma_1Z_{t-1} + (B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}Q_{t-1}$$

となる。[15] $(A8)$式と$(1b)$式より,$(A20)$式は,

---

[15] $n = \bar{n}$となっている事に注意。

$$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1}$$
$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

となるため,(2)式が導出された。

(4)式の導出

次に(4)式を導出しよう。(2)式が成立するという事は,

$$(A21)\quad X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1}$$
$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$
$$(A22)\quad X_{t-1} = B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-2} + \gamma_1 Z_{t-2}$$
$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

ということである。$(A22)$式を$(A21)$式に代入し,整理していくと,

$$X_t = B_{11}J_1B_{11}^{-1}\Big\{B_{11}J_1B_{11}^{-1}X_{t-2} + \gamma_1 Z_{t-2}$$
$$-(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})\Big\}$$
$$+\gamma_1 Z_{t-1} - (B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$
$$= -(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$
$$-B_{11}J_1B_{11}^{-1}(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$
$$+\gamma_1 Z_{t-1} + B_{11}J_1B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-2} + B_{11}J^2B_{11}^{-1}X_{t-2}$$

となる。ここで,

$$\Phi = -(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$
$$\Psi = -B_{11}J_1B_{11}^{-1}(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

とする。Φは整理していくと,

$$\Phi = -(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$
$$= -(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}J_2^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

$$= -(B_{12} + B_{11}J_1C_{12}C_{22}^{-1}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

となる。ここで,公式 4および$B_{12} = B_{11}B_{11}^{-1}B_{12}$という関係式を用いると,最終的に$\Phi$は,

$$= -(B_{11}B_{11}^{-1}B_{12} - B_{11}J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

$$(A23)\quad = -B_{11}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

となる。またΨは整理していくと,

$$\Psi = -B_{11}J_1B_{11}^{-1}(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

$$= -B_{11}J_1B_{11}^{-1}(B_{11}J_1C_{12} + B_{12}J_2C_{22})C_{22}^{-1}J_2^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

$$= -B_{11}J_1B_{11}^{-1}(B_{12} + B_{11}J_1C_{12}C_{22}^{-1}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

となる。公式 4を用いると,最終的にΨは,

$$(A24)\quad = -B_{11}J_1(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

となる。よって$(A23), (A24)$より,X_tは最終的に,

$$(A25)\quad X_t = -B_{11}(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

$$- B_{11}J_1(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-2}|\Omega_{t-2})$$

$$+ \gamma_1Z_{t-1} + B_{11}J_1B_{11}^{-1}\gamma_1Z_{t-2} + B_{11}J^2B_{11}^{-1}X_{t-2}$$

となる。次に$X_{t-2} = \cdots$を代入し,同様の整理を行い,次に…,というように,同様の操作をt回繰り返し,整理すると,

$$X_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}\,(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\left(Z_{t-j+i}\middle|\Omega_{t-j}\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}\,B_{11}^{-1}\gamma_1Z_{t-j} + B_{11}J_1^{t}B_{11}^{-1}X_0$$

となるため(4)式が導出された。

(5)式の導出

続けて(5)式を導出しよう。(3)式に(4)式を代入し,整理すると,

$$P_t = -C_{22}^{-1}C_{21}\left\{-\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}\,(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\big(Z_{t-j+i}\big|\Omega_{t-j}\big)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{t} B_{11}J_1^{j-1}\,B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{11}J_1^t B_{11}^{-1}X_0\right\}$$

$$-\,C_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t)$$

$$= \sum_{j=1}^{t} C_{22}^{-1}C_{21}B_{11}J_1^{j-1}\,(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\big(Z_{t-j+i}\big|\Omega_{t-j}\big)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} C_{22}^{-1}J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t) - \sum_{j=1}^{t} C_{22}^{-1}C_{21}B_{11}J_1^{j-1}\,B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} - C_{22}^{-1}C_{21}B_{11}J_1^t B_{11}^{-1}X_0$$

となる。公式3を用いると,P_tは最終的に,

$$P_t = -\sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}\,(B_{11}^{-1}B_{12} - J_1B_{11}^{-1}B_{12}J_2^{-1})\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E\big(Z_{t-j+i}\big|\Omega_{t-j}\big)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} C_{22}^{-1}J_2^{-i-1}\,(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i}|\Omega_t) + \sum_{j=1}^{t} B_{21}J_1^{j-1}\,B_{11}^{-1}\gamma_1 Z_{t-j} + B_{21}J_1^t B_{11}^{-1}X_0$$

となるので(5)式が導出された。

(6)式の導出

ここまで,モデルが一般的な場合の合理的期待解,(2)~(5)式を導出した。次に先決変数と非先決変数が一つである場合の,合理的期待解(6), (7)式の導出を行う。まず(6)式の導出から行う。導出の手順が一般的なケースと同じなので,導出した(2)式を用いて解いてみよう。x_tは以下のようになる。

$$x_t = b_{11}\lambda_1 b_{11}^{-1}x_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1}$$

$$-\,(b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22})c_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1}\,(c_{21}\gamma_1 + c_{22}\gamma_2)E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

この式を整理していくと,

$$= \lambda_1 x_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1}$$

$$-(b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22})c_{22}^{-1}(c_{21}\gamma_1 + c_{22}\gamma_2)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1}\,E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

ここで,$\varphi_1 = -(b_{11}\lambda_1 c_{12}c_{22}^{-1}c_{21} + b_{12}\lambda_2 c_{21}), \varphi_2 = -(b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22})$とすると,

$$= \lambda_1 x_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} + (\varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

となる。一方,$A = C^{-1}JC$であるから,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} \\ \lambda_2 c_{21} & \lambda_2 c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\lambda_1 c_{11} + b_{12}\lambda_2 c_{21} & b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22} \\ b_{21}\lambda_1 c_{11} + b_{22}\lambda_2 c_{21} & b_{21}\lambda_1 c_{12} + b_{22}\lambda_2 c_{22} \end{bmatrix}$$

である。よって$b_{12}\lambda_2 c_{21} = a_{11} - b_{11}\lambda_1 c_{11}$であるので,$\varphi_1$は,

$$\varphi_1 = -(b_{11}\lambda_1 c_{12} c_{22}^{-1} c_{21} + a_{11} - b_{11}\lambda_1 c_{11})$$
$$= \{(c_{11} - c_{12} c_{22}^{-1} c_{21}) b_{11}\lambda_1 - a_{11}\}$$

となる。逆行列の公式より,$b_{11}^{-1} = c_{11} - c_{12} c_{22}^{-1} c_{21}$であるから,$\varphi_1$は最終的に,

$(A26)$
$$\varphi_1 = \lambda_1 - a_{11}$$

となる。また$a_{12} = b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22}$であるから,$\varphi_2$は,

$(A27)$
$$\varphi_2 = -a_{12}$$

となる。$(A26)$, $(A27)$式より,x_tは最終的に,

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-1} + ((\lambda_1 - a_{11})\gamma_1 - a_{12}\gamma_2)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i-1} E(Z_{t+i-1}|\Omega_{t-1})$$

となり$\mu = (\lambda_1 - a_{11})\gamma_1 - a_{12}\gamma_2$とすれば,(6)式となる。

(7)式の導出

(7)式の導出も同様に行う。(3)式より,p_tは以下のようになる。

$$p_t = -c_{22}^{-1} c_{21} x_t - c_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2) E(Z_{t+i}|\Omega_t)$$

これは,

$$= \frac{1}{b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22}}\left\{-(b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22}) c_{22}^{-1} c_{21} x_t \right.$$
$$\left. - (b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22}) c_{22}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1}(C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2) E(Z_{t+i}|\Omega_t)\right\}$$

ということであり,さらに,$b_{12}\lambda_2 c_{21} = a_{11} - b_{11}\lambda_1 c_{11}$, $a_{12} = b_{11}\lambda_1 c_{12} + b_{12}\lambda_2 c_{22}$であるから,整理すると,

$$= \frac{1}{a_{12}}\left\{-(b_{11}\lambda_1 c_{12} c_{22}^{-1} c_{21} + a_{11} - b_{11}\lambda_1 c_{11}) x_t - \mu\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1} E(Z_{t+i}|\Omega_t)\right\}$$

$$= a_{12}^{-1}\left\{-(a_{11} - (c_{11} - c_{12} c_{22}^{-1} c_{21}) b_{11}\lambda_1) x_t - \mu\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1} E(Z_{t+i}|\Omega_t)\right\}$$

となる。$b_{11}^{-1} = c_{11} - c_{12}c_{22}^{-1}c_{21}$であるから,$p_t$は最終的に,

$$p_t = a_{12}^{-1}\left\{(\lambda_1 - a_{11})x_t - \mu \sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-i-1} E(Z_{t+i}|\Omega_t)\right\}$$

となるため(7)式が導出された。以上で(2)~(7)式の導出は終了である。

参考文献

松坂和夫 (1980), 『線型代数入門』, 岩波書店.

宮岡悦良・眞田克典 (2007), 『応用線形代数』, 共立出版.

矢野浩一 (2005), 「線形差分方程式マクロモデルの合理的期待解 Blanchard and Kahn (1980)覚書」, (未刊行). www.geocities.jp/koiti_yano_1/econ/blanchardKahn.pdf. 最終閲覧日 2017/05/07.

Blanchard, O. J. and Kahn, C. M. (1980), "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations," *Econometrica*, 48, 1305-1311.

Kollmann, R. and Zeugner, S. (2016), "Blanchard and Kahn's (1980) Solution for a Linear Rational Expectations Model with One State Variable and One Control Variable: The Correct Formula," *The Manchester School*, Version of Record online: 25 December 2016, DOI: 10.1111/manc.12180.

Stokey, N. L. and Lucas, R. E. Jr., with Prescott, E. C. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.