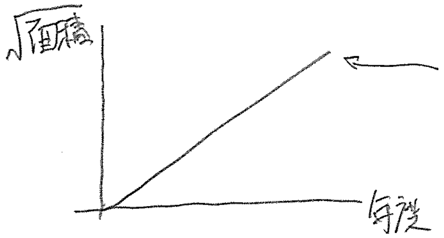
2022年12月19日. 巌佐庸教授 講義　　文責 松尾正

テキスト『数理生物学入門』(共立出版) P.100.

昔, チェコスロバキアで マスクラットという哺乳類を, 毛皮をとるために飼っていたが, こういうものは, たいてい, うまくいかない. やがてほったらかしているうちに逃げ出して, 農産物にすごい被害をもたらした。P.101に地図. 毎年どこまで広がったか.

P.104. 広がった面積のルートをとったら, 長さのオーダーになるが.



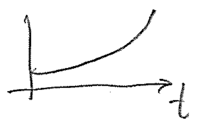
こんなように比例する.
どうして一定のスピードなのか? このスピードは何で決まるのか?

マスクラットは, 子は親と違う所に行って巣を作る. 同じことは, 鳥とか昆虫とかでもある.

大事なことは
{ 増殖
{ 拡散

この拡散をどう表すか?
体の組織が化学物質を出す時にもある.

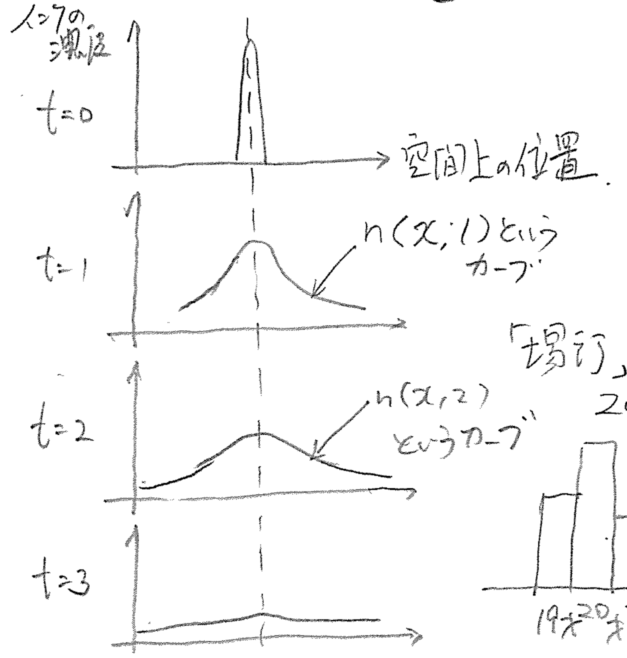
増殖を表すのは, $\frac{dN}{dt} = rN$ とか. これは



これでおしまい.

では拡散は?

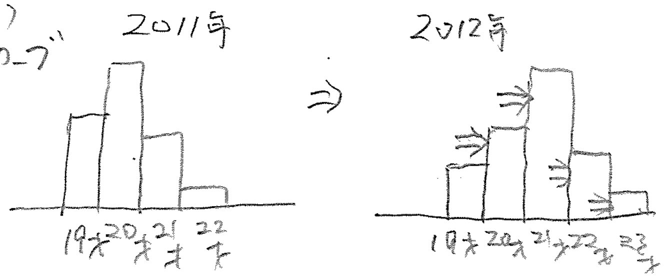
今, 何かにインクを一滴たらすと, 広がっていく



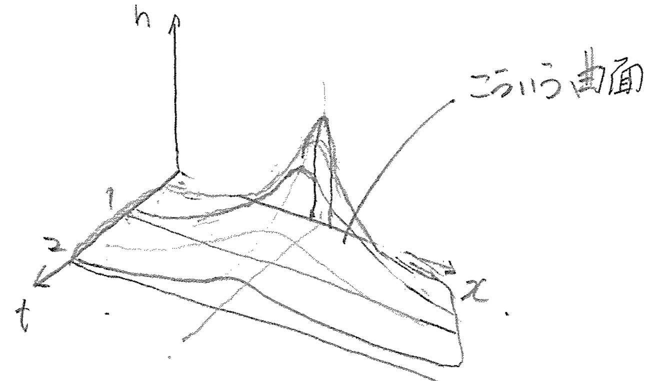
人口 n ← { 場所 x, 時刻 t
(インクの濃度)

$\frac{dN}{dt} = rN$ は「場所」が入ってない.
これは「場所」がはいる.

「場所」だけではなくて, 「年齢」でもよい.

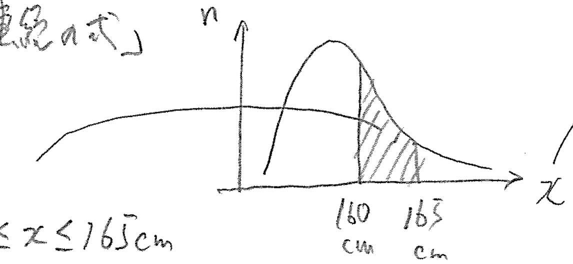


時間がたてばカーブはかわる. だから, $n \leftarrow \begin{matrix} x \\ t \end{matrix}$ は.



これを表すには「偏微分方程式」

P.85「連続の式」



場所, 年齢, 体重…
何でもいい
「身長」ということにしよう.

人口:
$160\text{cm} \leq x \leq 165\text{cm}$

もっと一般化すると, x が $a < x < b$ である人口は $\int_a^b n(y, t)\,dy$

こいつが時間が経つとどうなるか?

身長が伸びて, 160cm未満だった人がこれに入り, 165cm こえた人が出ていく.

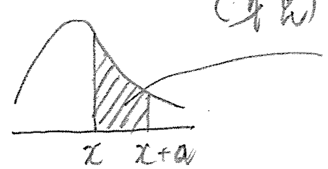
これを式に書くと

$$\frac{d}{dt}\int_a^b n(y, t)\,dt = J(a, t) - J(b, t)$$

ただし, $J(a, t)$ とは, 単位時間あたり, x が a を右へ横切る正味の人数(ネット)

これを「フラックス」と言う. a のフラックスで入り, b のフラックスで出ていく.

今ある場所(身長)と, もう少し右っ側の場所(身長)との違いで表す. つまり, x と $x+a$ との間.



$\int_x^{x+a} n(y, t)\,dy$

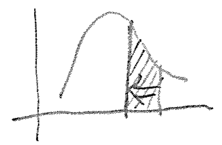
この時間変化は

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+a} n(y, t)\,dy = -J(x+a, t) + J(x, t)$$

このaを小さくしていって．$a \to 0$．　両辺をaでわってあげると

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{a}\int_x^{x+a} n(y,t)\,dy}_{\downarrow\ n(x,t)} = \underbrace{-\frac{J(x+a,t)-J(x,t)}{a}}_{\downarrow\ \frac{d}{dx}J(x,t)}$$

$a \to 0$で



ただ，記号のうえで，こうは書かない約束．

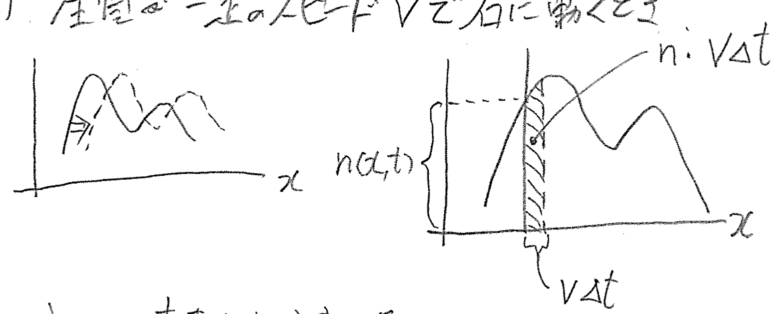
微分とは「傾き」．布みたいなものの傾きはどっちの方向の傾きかが問題

そこで，ひとつの変数だけで微分するようにする．→偏微分．∂

$$\frac{\partial}{\partial t}n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)$$

これが「連続の式」$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$

例）全員が一定のスピードVで右に動くとき



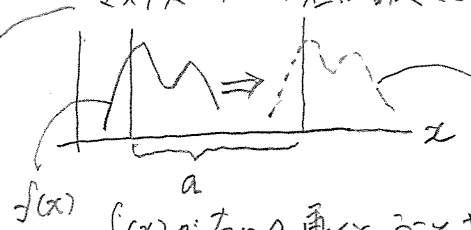
よって．Δtあたりでは．$J(x,t) = Vn(x,t)$

これを $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$ に代入すると

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{V\cdot n(x,t)\}$$

$$= -V\cdot\frac{\partial n}{\partial x}$$

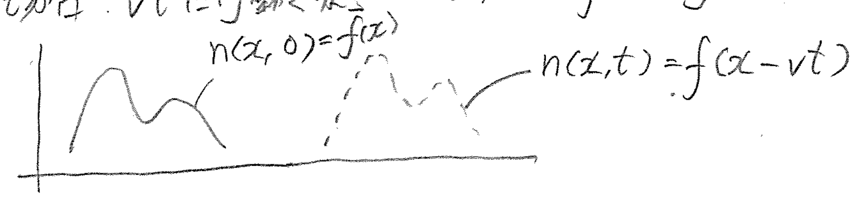
マイナスがつくと．右に動くことを表す．



$f(x)$が右にa動くということは．$f(x-a)$

xがaだけ大きくなってはじめて前と同じになるので

今の場合．vtだけ動くので，$n(x,0)=f(x)$とすると



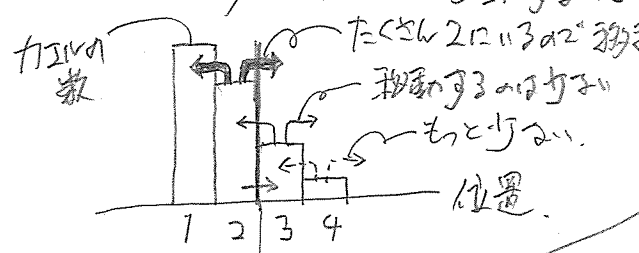
これがさっきの式を満たしているかどうか．

$$\text{左辺} = \frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = f'(x-vt)\times -V$$

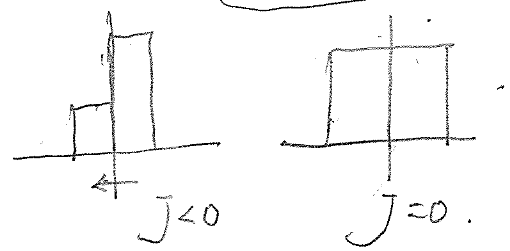
$$\text{右辺} = -V\times\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} = -V\times f'(x-vt)$$

同じになっている　たしかに正しい

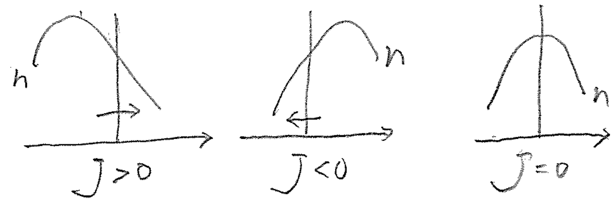
では．ランダムに左右に移動する例では？　右に行くのも左に行くのも同じ確率でランダムに行く．



ここのネットフラックスJは左からくる方が多い．$J>0$



Jは分布の傾きに依存する



よって．

$$\boxed{J = -D\cdot\frac{\partial n}{\partial x}}$$

密度の勾配．

拡散係数

フィックの法則（法則というより仮定）

これを「連続の式」$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$ に代入すると

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial n}{\partial x}\right)$$

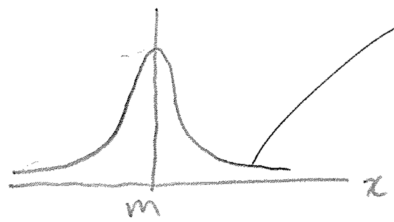
$$\therefore\ \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

拡散方程式

インクの滲みもこれに従う．バラバラになっていくもの．

$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ の解は、 $n(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

平均 m, 分散 σ^2 の分規分布は、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$



だったなら、

$m=0$, $\sigma^2 = 2Dt$ とおいたもの

位置に関して、正規分布している。

分散が時間に比例している。(標準偏差は時間のルートに比例する)

ただ、正規分布は全部積分したら1。それに対して、N がのっている。

つまり、全部積分したらNになる。これはインクの粒子の数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x,t)\,dx = N$$ これが不変ということ。

これから、これが拡散方程式の解であることを示す。

まず右辺から、まず x で微分 1階目。

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(-\frac{x}{2Dt}\right)$$

もういっぺん微分する

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left[\left(-\frac{x}{2Dt}\right)^2 - \frac{1}{2Dt}\right]$$

今度左辺

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{-\frac{1}{2}N}{\sqrt{4\pi D\underbrace{t\cdot t}_{t^{\frac{3}{2}}}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(-\frac{x^2}{4D}\cdot\frac{-1}{t^2}\right)$$

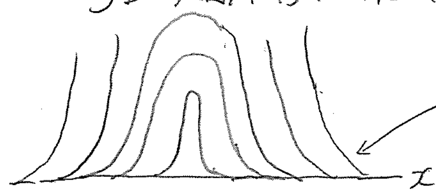
$\times D$ $\times D$

$$= \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2}\right]$$

目出たく $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ が出た

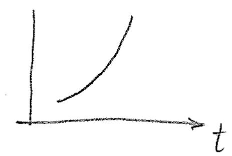
5

さて、チェコスロバキアにいたマスクラットは、一定ではなくて増える。



すそがほぼ同じ形をしながら広がっていく。

人口増加の式 $\frac{dN}{dt} = rN$



これが加わって。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + rn$$

拡散、ランダムな運動

増殖。

一番簡単な指数増殖のケース

これの解はこうなる。 $n(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \cdot e^{rt}$ かけるだけ

これも左辺やって右辺やって確かめなあかんのか?

そんなことをしなくても簡単に出ます。(テキスト演習問題の7.2)

$m(x,t)$ が $\frac{\partial m}{\partial t} = D\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}$ の答だとしましょう

すると、$m(x,t)e^{rt}$ が $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + rn$ の答だということを示せばよい。

$n(x,t) = m(x,t)e^{rt}$

$$\text{左辺} = \frac{\partial}{\partial t}(me^{rt}) = \frac{\partial m}{\partial t}e^{rt} + mre^{rt}$$

$$\text{右辺} = D\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(me^{rt}) + rme^{rt}$$

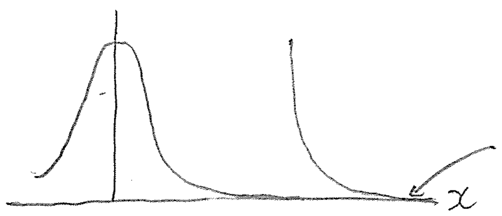
偏微分だからこいつは定数扱い

$$= D\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}e^{rt} + rme^{rt}$$

同じ

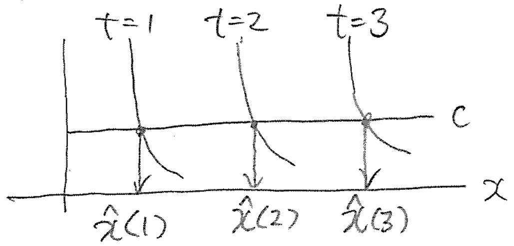
よって言えた。

6



すそはどこまでいっても0にはならない

どこまで分布が広がったかを示すには、ある濃度が要る。
農家の人が文句を言い出す個体数。これをcとする。



広がりのフロント $\hat{x}(t)$ は、
$n(x,t)=c$ となる x。

するとマスクラットのスピードが計算できる。$\hat{x}(t)$ のスピード。

$$\frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{\hat{x}(t)^2}{4Dt}}e^{rt}=c$$

対数をとる。

$$-\frac{\hat{x}(t)^2}{4Dt}+rt=\log\left(\frac{c}{N}\sqrt{4\pi Dt}\right)$$

t で割る。

$$\frac{\hat{x}(t)^2}{4Dt^2}=r-\underline{\frac{1}{t}\log\left(\frac{c}{N}\sqrt{4\pi Dt}\right)}$$

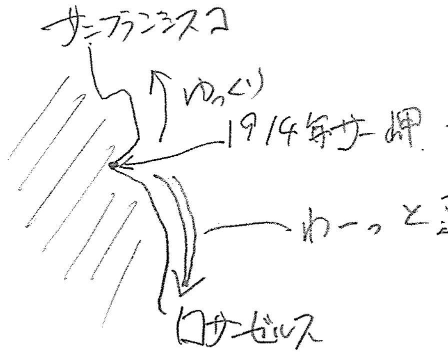
これは $t\to\infty$ とすると $\to 0$

よって、時間がたつと

$$\frac{\hat{x}(t)^2}{t^2}=4Dr \qquad \therefore\ \frac{\hat{x}}{t}\to 2\sqrt{rD}$$

ランダムな動き
増殖率
この両方ないといけない
幾何平均

テキスト7.5節　ラッコの話。ウニを食べる。ウニはどこにいるか。コンブのあるところ。



ここから拡散

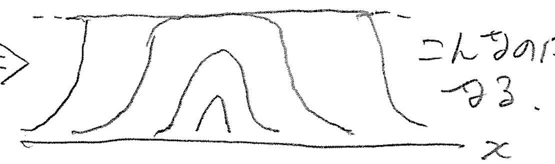
わーっと速く行く。

どうして南に行くのが速いの。
南方がエサが多くて r が大きい

指数増殖ならバラバラする。rn というのは乱暴。密度が混んでくると下がる

ロジスティック $rn\left(1-\frac{n}{K}\right)$ でいこう

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+rn\left(1-\frac{n}{K}\right)\Rightarrow$$



こんなのになる。

これは $n=$ 〜〜 と解くことはできない。
ただスピードについては、こいつにしても $2\sqrt{rD}$ でよい。
直観的には、すそのスピードは上の方は関係ないから

今日の話の式は、性比の話とか F検定の F で有名なフィッシャーが作った。
テキストp.107には、考古学で、農耕文明がどう広がったのか。
日本では稲作がどう広がったか。これも同じような式でやる
化学物質だと、分解されてなくなっていくのもあるので

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}=D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}_{拡散}+f(p,t)$$

できたり減ったり
「反応」と言う

魚のシマシマもよう（チューリングパターン）なども これでやる。