応用経済研究(EE)　講義ノート

投入係数a_{ij}を,第j財を1単位生産するために必要な第i財の投入量と定義する。以下では財の種類が2種類の場合,2財モデルで考える。$\mathbb{A}$を投入係数行列とし,次のように表す。

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

例えば,a_{12}は第2財を1単位生産するために必要な第1財の投入量である。ここで第1列目を$\mathbb{a}_1$とすると,

$$\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

である。$\mathbb{a}_1$は列ベクトルと呼ばれるものである。これは第1財1単位生産のために,第1財・第2財をa_{11}, a_{21}投入するということを示している。つまり$\mathbb{a}_1$は第1部門の技術を表現している。同様に第2列目を$\mathbb{a}_2$とすると,

$$\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

である。これは第2財1単位生産のために,第1財・第2財をa_{21}, a_{22}投入するということを示している。つまり$\mathbb{a}_2$は第2部門の技術を表現している。

x_iを第i財の総生産量,y_iを第i財の純生産量とすると,第1財に関して,

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1$$

となる。ここで,$a_{11}x_1$は第1財をx_1生産するための第1財の投入量,$a_{12}x_2$は第2財をx_2生産するための第1財の投入量,y_1は第1財の純生産量である。 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$は,投入された第1財の補填分を示す。同様に,第2財に関して,

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$$

となる。ここで,$a_{21}x_1$は第1財をx_1生産するための第2財の投入量,$a_{22}x_2$は第2財をx_2生産するための第2財の投入量,y_2は第2財の純生産量である。 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$は,投入された第2財の補填分を示す。

以上の式を行列・ベクトル表記[1]にすると,

[1] 行列の計算方法は,以下の通り。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u & b + v \\ c + w & d + z \end{pmatrix}$$

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$$

の二本の式は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と表される。というのは、これを計算すると、次のようになり、上二式と同じになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ここで,$\mathbb{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$を総生産ベクトル, $\mathbb{y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$を純生産ベクトルとすると,

$$\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{y}$$

となる[2]。もし財がn種類あるのなら,

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 \\
x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3n}x_n + y_3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n + y_n
\end{aligned}$$

となる。これを行列・ベクトル表記にすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & \cdots & a_{nn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ここで,$\mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbb{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{y} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$とすると,

$$\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{y}$$

と表記できる。このように表記の簡略化というのが,行列を使用する利点の一つである。

再び,2財モデルで考える。両辺から$\mathbb{A}\mathbb{x}$をひくと,

$$\mathbb{x} - \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{y}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。これは,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-u & b-v \\ c-w & d-z \end{pmatrix}$$

[2] 財の種類が1種類の場合は,$x = ax + y$と記述できるので,行列・ベクトル表記を使用することにより,あたかも財の種類が1種類の場合のような簡潔な表記を与えることが出来る。

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&1-a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$

となる。ここで,$\mathbb{I}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$である。$\mathbb{I}$は単位行列と呼ばれている[3]。一般に,

$$\mathbb{x}-\mathbb{A}\mathbb{x}=\mathbb{y}$$
$$\mathbb{I}\mathbb{x}-\mathbb{A}\mathbb{x}=\mathbb{y}$$
$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$

であるが,これは純生産$\mathbb{y}$が与えられた時,それを実現するための総生産$\mathbb{x}$を解くということである。ここで行列$\mathbb{B}$に対して,$\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1}=\mathbb{I}$となるような$\mathbb{B}^{-1}$を$\mathbb{B}$の逆行列と定義する。そうすると,$(\mathbb{I}-\mathbb{A})$の逆行列$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$を左からかけることで,

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$
$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}$$
$$\mathbb{I}\mathbb{x}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}$$
$$\mathbb{x}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}$$

となり,$\mathbb{x}$について解くことが出来た。

以下,より詳しく議論を進めていく。$\mathbb{A}$を投入係数行列,$\mathbb{x}$を総生産ベクトル,$\mathbb{y}$を純生産ベクトルとすると,

$$\mathbb{x}-\mathbb{A}\mathbb{x}=\mathbb{y}$$
$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$

である。さらに,

$\mathbb{a}>\mathbb{b}\ldots$すべての$i$について$a_i>b_i$

$\mathbb{a}\geq\mathbb{b}\ldots a_i=b_i$の要素があってもよいが, $a_j>b_j$となる要素が存在。

$\mathbb{a}\geqq\mathbb{b}\ldots$すべての要素について$a_i>b_i$でもよい。$\mathbb{a}>\mathbb{b},\mathbb{a}\geq\mathbb{b}$でもよい。

と表記する。そうすると,

$\mathbb{a}>\mathbb{0}\ldots$全要素が正(強正)

$\mathbb{a}\geq\mathbb{0}\ldots$正の要素が必ずあるが,0要素があってもよい(準正)

---

[3] ある行列に単位行列をかけても,その行列に変化はない。例えば,行列$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$に単位行列を左からかけると,

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

となり,元の行列と一致する。そのため$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$である。

$\mathbb{a} \geqq \mathbb{0}$…全部0の要素があってもよい(0以上)
と表記できる。よって,上述の方程式$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$,即ち純生産$\mathbb{y}$が与えられた時,それを実現するための総生産$\mathbb{x}$を解くという問題に解が存在するということは,

$$for\ \forall \mathbb{y} \geq \mathbb{0}, \exists \mathbb{x} \geq \mathbb{0}, (\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$

ということである。これは以下のすべての条件と同値である。

・ホーキンス・サイモン条件(H.S 条件)…行列$(\mathbb{I}-\mathbb{A})=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}$の任意の首座小行列式がすべて正である。即ち,

$$1-a_{11}>0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{vmatrix}>0, \dots\dots, |\mathbb{I}-\mathbb{A}|>0$$

・$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1} \geq \mathbb{0}$
このとき、$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$の左から$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$をかけると,$\mathbb{x}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}$となるが,
$\mathbb{y} \geq \mathbb{0}, (\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1} \geq \mathbb{0}$だから, $\mathbb{x} \geq \mathbb{0}$である。
・$\lim_{n \to \propto} \mathbb{A}^n = \mathbb{0}$
このとき、$\mathbb{x}=\mathbb{y}+\mathbb{A}\mathbb{y}+\mathbb{A}^2\mathbb{y}+\mathbb{A}^3\mathbb{y}+\cdots=(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\mathbb{A}^3+\cdots)\mathbb{y}$であるが[4],

$$\mathbb{S} \equiv \mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\mathbb{A}^3+\cdots\mathbb{A}^n$$

とすると,

$$\mathbb{A}\mathbb{S}=\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\mathbb{A}^3+\mathbb{A}^4+\cdots\mathbb{A}^{n+1}$$

となり,前者から後者を差し引くと,

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{S}=\mathbb{I}-\mathbb{A}^{n+1}$$

$$\mathbb{S}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{A}^{n+1})$$

となるため,

$$\lim_{n \to \propto} \mathbb{S}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1} \geq \mathbb{0}$$

となる。
・すべての$\mathbb{A}$の固有値の絶対値が 1 より小さい。

以下では,H.S 条件について詳しく検討する。財の種類が1種類の場合は$x=ax+y$で,左辺が生産量,右辺は需要・財の使い道であるが,これを解くと,

$$x=\frac{y}{1-a}$$

である。$\forall y>0$に対して,$\exists \mathbb{x}>\mathbb{0}$となる条件は,

$$1-a>0$$

である。これは経済学的には純生産可能条件と呼ばれるもので,H.S 条件そのものである。

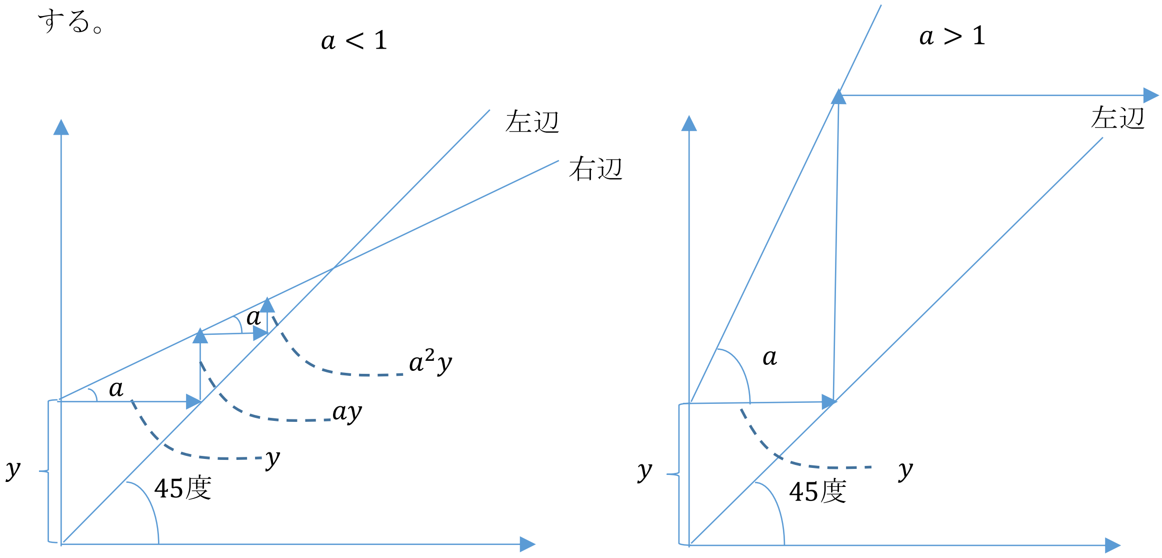
[4] ここで,$\mathbb{A} \geq \mathbb{0}, \mathbb{A}^2 \geq \mathbb{0}, \mathbb{A}^3 \geq \mathbb{0}$ …である。

ではa > 1の場合,解は負なのであろうか。そうではない,なぜなら,

$$x = y + ay + a^2y + a^3y + \cdots$$

$$x = y(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)$$

で,$a > 1$なら,これは∞となる。もし$a < 1$であれば,これは$x =$ [illegible] どの解と一致する。



次に2財モデルで H.S 条件を検討する。2財モデルの場合は,

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$$

であるが,行列・ベクトル表示にすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となるが,この場合の H.S 条件は,

$$1 - a_{11} > 0, \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$$

であるが,$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$より,

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) > a_{12}a_{21} > 0$$

で,$1 - a_{11} > 0$であることを考慮すれば,

$$1 - a_{22} > 0$$

ということも条件となる。$1 - a_{11} > 0, 1 - a_{22} > 0$は通常の純生産可能条件であるが,では$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$はどのような経済学的意味があるのだろうか。そこで,第2財を1単位生産するために直接・間接的に必要な2財の量を考える。これは,

$$1 > a_{22} + a_{12}(1 + a_{11} + a_{11}^2 + a_{11}^3 + \cdots)a_{21}$$

である。ここで,a_{22}は第2財を1単位生産するために必要な第2財の直接投入量,a_{12}は第2財を1単位生産するために必要な第1財の投入量,$1 + a_{11} + a_{11}^2 + a_{11}^3 + \cdots$は第1財を1単位純生産するために生産される第1財の総生産量,a_{21}は第1財を1単位生産するのに投入される第2財の投入量である。つまり$a_{12}(1 + a_{11} + a_{11}^2 + a_{11}^3 + \cdots)a_{21}$で,第2財1単位生産のために生産される第1財を生産するための第2財の量を示す。よって$a_{22} + a_{12}(1 + a_{11} + a_{11}^2 + a_{11}^3 + \cdots)a_{21}$で,第2財を1単位生産するために直接・間接的に必要な第2財の量となり,これは1より小さくなければならない。上式の右辺は,

$$1 > a_{22} + a_{12}(1 + a_{11} + a_{11}^2 + a_{11}^3 + \cdots)a_{21} = a_{22} + a_{12}a_{21}\frac{1}{1 - a_{12}}$$

となるから,整理すると

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$$

となる。

以下のように,$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$という条件を理解することも出来る。

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1 \ldots ①$$

$$-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = y_2 \ldots ②$$

であるから,①,②式をx_2について解くと,

$$x_2 = \frac{1 - a_{11}}{a_{12}}x_1 - \frac{y_1}{a_{12}} \ldots ①'$$

$$x_2 = \frac{a_{21}}{1 - a_{22}}x_1 + \frac{y_2}{1 - a_{22}} \ldots ②'$$

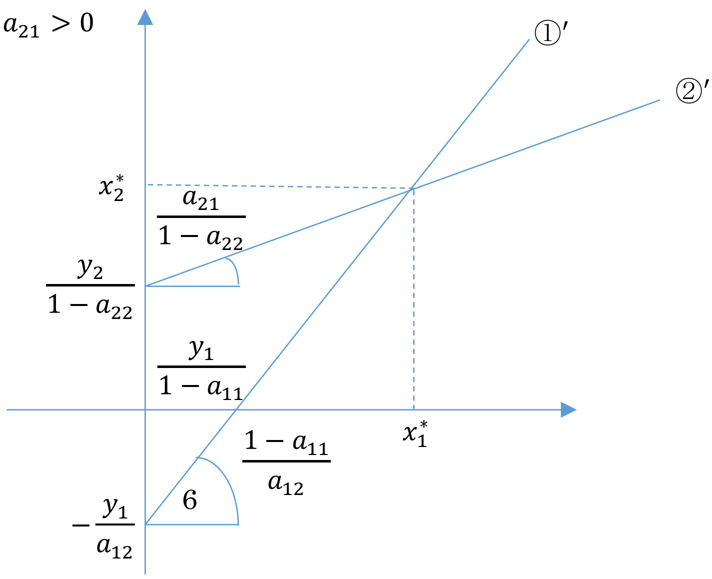
となる。これらを図に描くと,正象限で両者のグラフの交点$(x_1^*, x_2^* > 0)$が存在するためには,

$$\frac{1 - a_{11}}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{1 - a_{22}}$$

となっていなければならず,これを整理すれば,

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$$

となる。



ところで,

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$$

の解, x_1^*, x_2^*を求めてみよう。

$$(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1 \ldots ①$$
$$-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = y_2 \ldots ②$$
$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

であるから,クラーメルの公式を用いると解は,

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & -a_{12} \\ y_2 & 1-a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-a_{22})y_1 + a_{12}y_2}{\Delta}$$
$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & y_1 \\ -a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1-a_{11})y_2 + a_{21}y_2}{\Delta}$$

ここで,$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}$である。H.S 条件が満たされているのなら,$x_1^*, x_2^* > 0$である。

この解を,図を用いて理解することも出来る。図において,x_1^*はx_1軸方向に赤と緑の部分を足し合わせたものである。赤の部分は,

$$\frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}}{1-a_{11}} + \frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\frac{a_{12}}{1-a_{11}} + \frac{y_2}{1-a_{22}}\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2\frac{a_{12}}{1-a_{11}} + \cdots$$
$$= \frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(1 + \frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})} + \left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2 + \left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^3 + \cdots\right)$$

H.S 条件が満たされているのなら,

$$(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$$
$$\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})} < 1$$

であるので,

$$= \frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}}}\right) = \frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(\frac{(1-a_{11})(1-a_{22})}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}\right)$$

$$=\frac{a_{12}y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

となる。緑の部分は,

$$\frac{y_1}{1-a_{11}}+\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}+\frac{y_1}{1-a_{11}}\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{y_1}{1-a_{11}}\left(1+\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^3+\cdots\right)$$

H.S 条件が満たされているのなら,

$$(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$$

$$\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}<1$$

であるので,

$$\frac{y_1}{1-a_{11}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}}}\right)=\frac{y_1}{1-a_{11}}\left(\frac{(1-a_{11})(1-a_{22})}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right)$$

$$=\frac{(1-a_{22})y_1}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

となる。よって赤と緑の合計は,

$$\frac{a_{12}y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}+\frac{(1-a_{22})y_1}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

$$=\frac{(1-a_{22})y_1+a_{12}y_2}{\Delta}$$

となる。

同様に図において,x_2^*はx_2軸方向に赤と緑の部分を足し合わせたものである。赤の部分は,

$$\frac{y_2}{1-a_{22}}+\frac{y_2}{1-a_{22}}\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}+\frac{y_2}{1-a_{22}}\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{y_2}{1-a_{22}}\left(1+\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{y_2}{1-a_{22}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}}}\right)=\frac{y_2}{1-a_{22}}\left(\frac{(1-a_{11})(1-a_{22})}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right)$$

$$=\frac{(1-a_{11})y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

となる。緑の部分は,

$$\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+\frac{y_1}{1-a_{11}}\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+\cdots$$

$$=\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}\left(1+\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^2+\left(\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}\right)^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a_{12}a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22})}}}\right)=\frac{y_1}{1-a_{11}}\frac{a_{21}}{1-a_{22}}\left(\frac{(1-a_{11})(1-a_{22})}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right)$$

$$=\frac{a_{21}y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

となる。よって赤と緑の合計は,

$$\frac{(1-a_{11})y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}+\frac{a_{21}y_2}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}$$

$$=\frac{(1-a_{11})y_2+a_{21}y_2}{\mathit{\Delta}}$$

となる。

これまで論じてきたのは,数量体系$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$である。つまり,

$$for\ \forall\mathbb{y}\geq\mathbb{0},\exists\mathbb{x}\geq\mathbb{0},(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$$

であるが,これと双対関係にあるのが,価値体系である。今,直接労働投入係数ベクトルをτ,投下労働価値ベクトルを$\mathbb{t}$で表すとする。この時,価値体系$\mathbb{t}(\mathbb{I}-\mathbb{A})=\tau$である。つまり,

$$for\ \forall\tau\geq\mathbb{0},\exists\mathbb{t}\geq\mathbb{0},\mathbb{t}(\mathbb{I}-\mathbb{A})=\tau$$

である。$\mathbb{t}>\mathbb{0}$であるのは,どのような時か。以下の二つが主なものである。

・置塩信雄…$\tau>\mathbb{0}$, $\mathbb{I}-\mathbb{A}$が H.S 条件を満たす。この場合,右から$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\geq\mathbb{0}$をかけることにより,$\mathbb{t}=\tau(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}>\mathbb{0}$となる。

・森嶋通夫…$\tau\geq\mathbb{0}$, $\mathbb{I}-\mathbb{A}$が H.S 条件を満たし,$\mathbb{A}$が分解不能。$\mathbb{A}$が分解不能とは以下のような場合である。適当に番号を付け替えることにより$\mathbb{A}$を以下のように出来る。

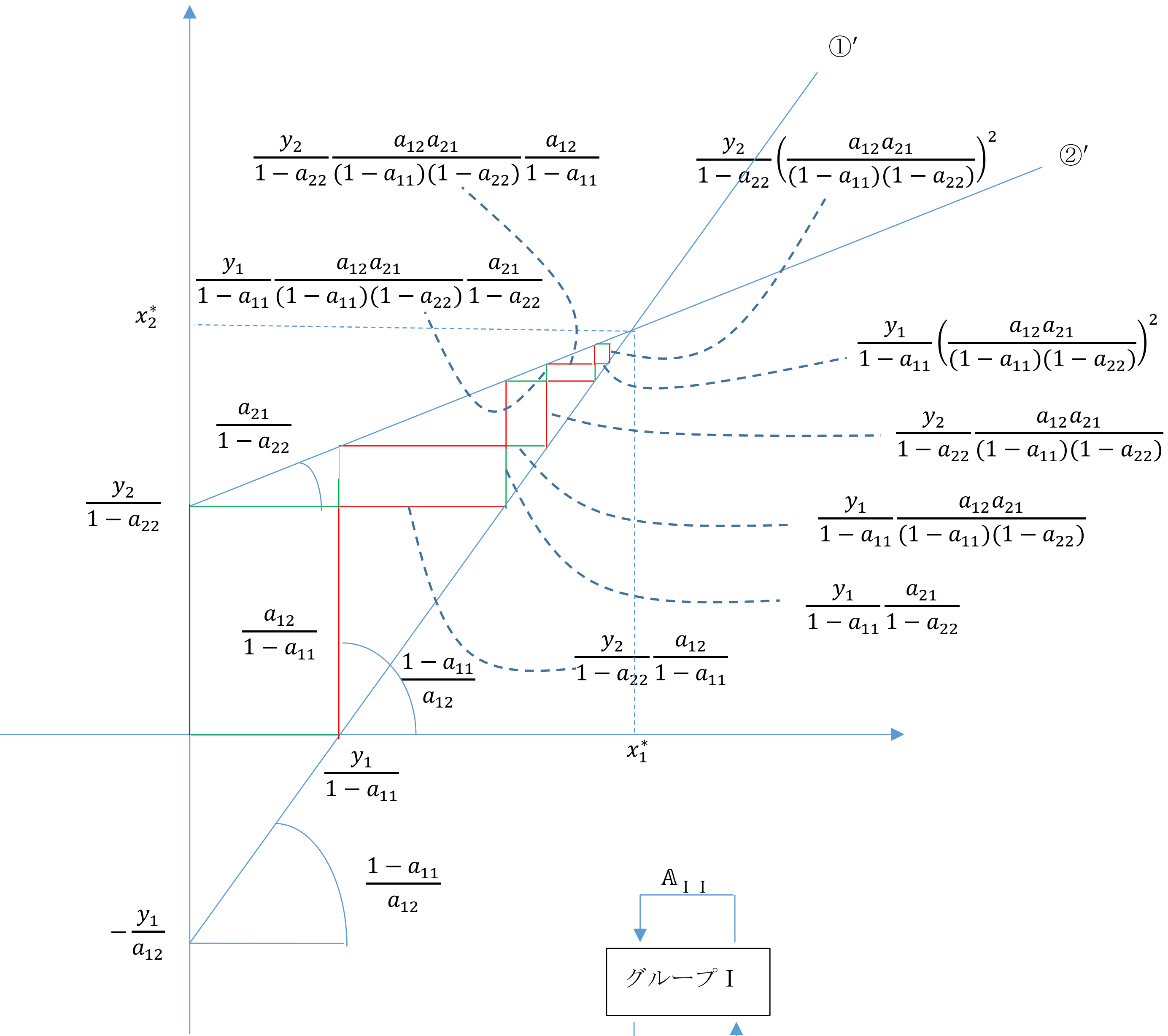
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{\mathrm{I\,I}} & \mathbb{A}_{\mathrm{I\,II}}\\ \mathbb{A}_{\mathrm{II\,I}} & \mathbb{A}_{\mathrm{II\,II}}\end{pmatrix}$$

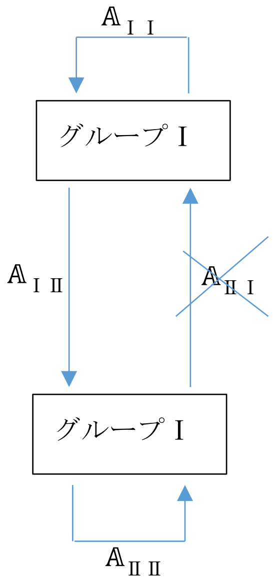
ここで,例えば$\mathbb{A}_{\mathrm{II\,I}}$はグループⅠの財を生産するために投入されるグループⅡの財の投入量である。この時,どのように番号を付け替えようとも,

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{\mathrm{I\,I}} & \mathbb{A}_{\mathrm{I\,II}}\\ \mathbb{0} & \mathbb{A}_{\mathrm{II\,II}}\end{pmatrix}$$

となるように出来ない場合,$\mathbb{A}$を分解不能であるという。出来る場合は分解可能であるとい

う(図も参照)。典型例は生産手段部門と消費財部門に分けられる, $\mathbb{A}_{\mathrm{II\,I}} = \mathbb{O}, \mathbb{A}_{\mathrm{II\,II}} = \mathbb{O}$のような場合である。





数量体系$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{y}$と,価値体系$\mathbb{t}(\mathbb{I}-\mathbb{A})=\tau$は双対関係にあるが,数量体系に左から$\mathbb{t}$を,価値体系に右から$\mathbb{x}$をかけると,

$$\tau\mathbb{x}=\mathbb{t}(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbb{x}=\mathbb{t}\mathbb{y}$$

となる。今第i要素が1で,残りの要素が0であるような純生産ベクトル,つまり,

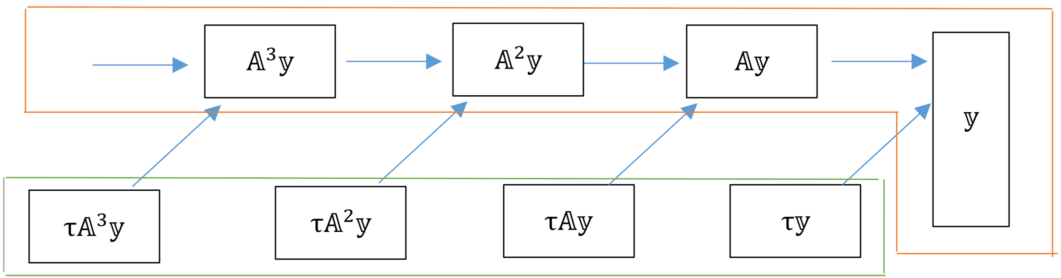
$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

を考える。この場合

$$\mathbb{t}\mathbb{y}=\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & \cdots & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=t_i$$

であるから,t_iは第i財を1単位純生産するための経済全体での投入労働である。

　$\tau\mathbb{x}=\mathbb{t}\mathbb{y}$は以下のように理解することも出来る。



赤の部分は, $\mathbb{y}+\mathbb{A}\mathbb{y}+\mathbb{A}^2\mathbb{y}+\mathbb{A}^3\mathbb{y}+\cdots=(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\mathbb{A}^3+\cdots)\mathbb{y}=(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}=\mathbb{x}$

緑の部分は,$\tau\mathbb{y}+\tau\mathbb{A}\mathbb{y}+\tau\mathbb{A}^2\mathbb{y}+\tau\mathbb{A}^3\mathbb{y}+\cdots=\tau(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\mathbb{A}^3+\cdots)\mathbb{y}=\tau(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{y}=\tau\mathbb{x}=\mathbb{t}\mathbb{y}$である。

　単純商品生産社会(階級がない)では,長期均衡的には$\mathbb{p}=\lambda\mathbb{t}$となる。ここで,$\lambda$は正のスカラー,$\mathbb{p}$は価格ベクトルである。しかし,短期的には$\mathbb{p}\neq\lambda\mathbb{t}$。各自は単位労働あたり所得最大化を行う。そのため労働移動が起こり,所得率が均等化する。所得率をy(正のスカラー)とすると,長期的には,

$$\mathbb{p}=\mathbb{p}\mathbb{A}+y\tau$$

$$\mathbb{p}-\mathbb{p}\mathbb{A}=y\tau$$

$$\mathbb{p}(\mathbb{I}-\mathbb{A})=y\tau$$

$$\mathbb{p}=y\tau(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$$

$$\mathbb{p}=y\mathbb{t}$$

一方資本主義経済では,長期的にも$\mathbb{p} \neq \lambda\mathbb{t}$である。置塩信雄の「マルクスの基本定理」は例え$\mathbb{p} \neq \lambda\mathbb{t}$であったとしても,正の利潤の存在と労働の搾取の存在の同値であることを示したものである。以下,それを示す。利潤の存在は,

$$\mathbb{p} > \mathbb{p}\mathbb{A} + w\tau$$

である。ここで,wは貨幣賃金率で,$\mathbb{b}$を実質賃金率ベクトルとすれば,$w = \mathbb{p}\mathbb{b}$である。上式の両辺をwで割ると,

$$\frac{\mathbb{p}}{w} > \frac{\mathbb{p}}{w}\mathbb{A} + \tau$$

$$\frac{\mathbb{p}}{w}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) > \tau$$

である。さらに$\mathbb{t}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \tau$であるから,

$$\frac{\mathbb{p}}{w}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) > \mathbb{t}(\mathbb{I} - \mathbb{A})$$

$$(\frac{\mathbb{p}}{w} - \mathbb{t})(\mathbb{I} - \mathbb{A}) > \mathbb{0}$$

$\mathbb{I} - \mathbb{A}$が H.S 条件を満たすならば,

$$\frac{\mathbb{p}}{w} > \mathbb{t}$$

両辺に$\mathbb{b}$をかけることにより,

$$1 > \mathbb{t}\mathbb{b}$$

となり,労働の搾取の存在が導かれた。

ここまでの内容を要約したのが,以下の図である。

総労働配分という考えから,労働の搾取を再び考えてみる。総投入労働量Nとすると,$\tau\mathbb{x}$も総投入労働量であるから,$N = \tau\mathbb{x} = \mathbb{t}(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{x} = \mathbb{t}\mathbb{y}$である。労働の搾取は$1 > \mathbb{t}\mathbb{b}$であるから,両辺に$N$をかけることで,

$$N > \mathbb{t}\mathbb{b}N$$

となる。ここで,$\mathbb{t}\mathbb{b}N$は総賃金財の価値である。さらに式変形を繰り返すと,

$$N - \mathbb{t}\mathbb{b}N = (1 - \mathbb{t}\mathbb{b})N > 0$$

$$\mathbb{t}\mathbb{y} - \mathbb{t}\mathbb{b}\tau\mathbb{x} > 0$$

$$\mathbb{t}(\mathbb{y} - \mathbb{b}\tau\mathbb{x}) > 0$$

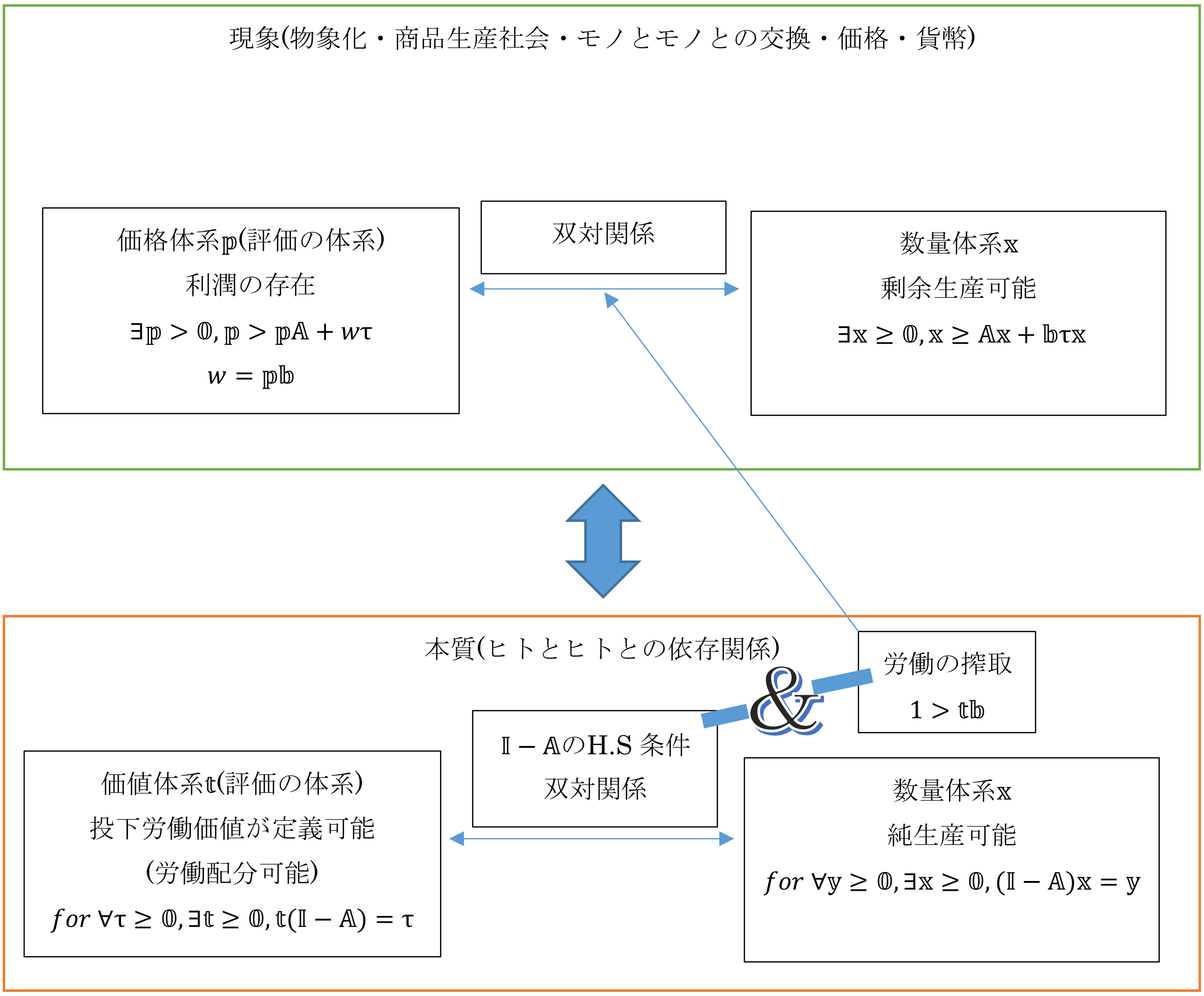
$$\mathbb{t}(\mathbb{x} - \mathbb{A}\mathbb{x} - \mathbb{b}\tau\mathbb{x}) > 0$$

$$\mathbb{t}\{\mathbb{x} - (\mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{b}\tau\mathbb{x})\} > 0$$

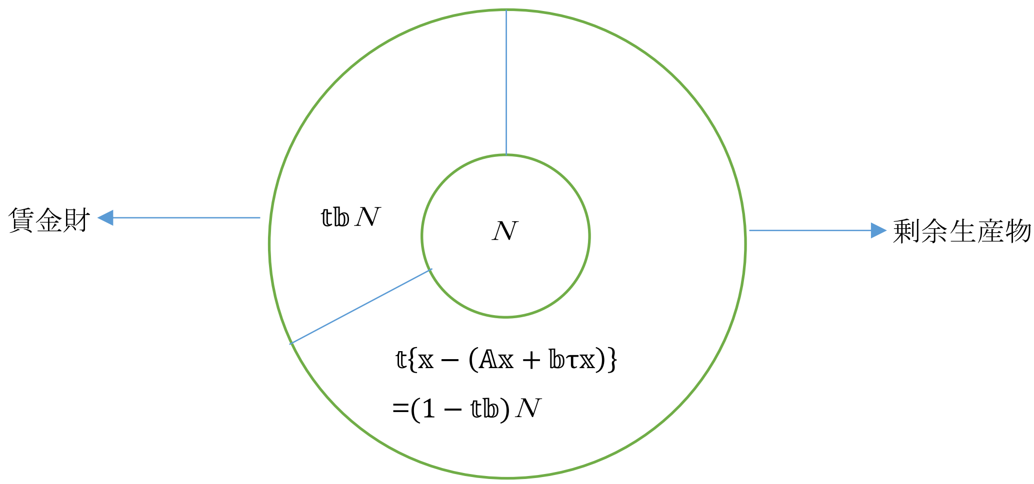
$\mathbb{b}\tau\mathbb{x}$は総賃金財であるから,$\mathbb{x} - (\mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{b}\tau\mathbb{x})$で,剰余生産物を意味している。$\mathbb{t} > \mathbb{0}$であるから,

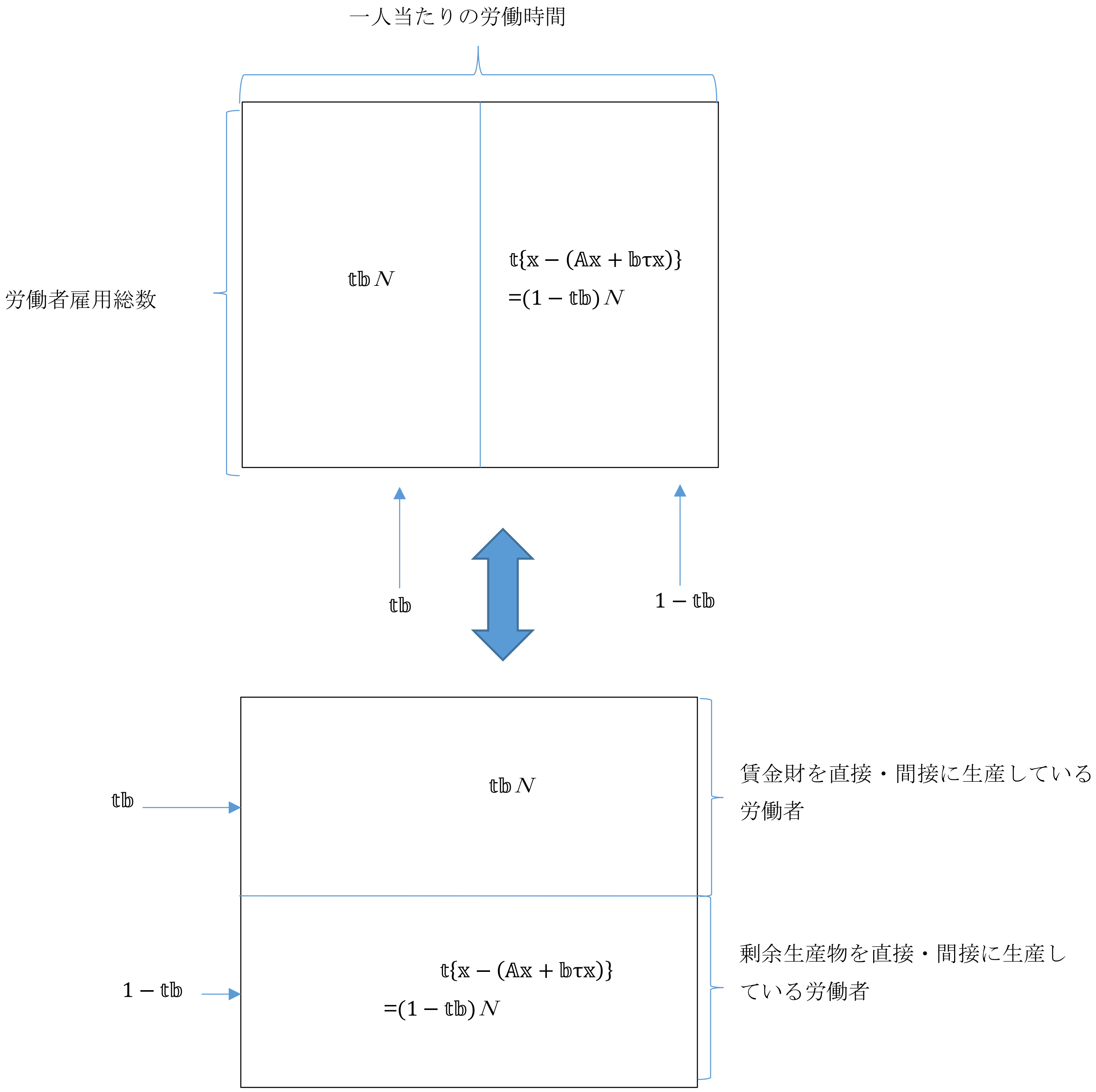
$$\mathbb{x} - (\mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{b}\tau\mathbb{x}) > \mathbb{0}$$

となり,労働の搾取が存在から,剰余生産物の存在が導かれた。



以下の図は,以上の議論の概念図である。




一人当たりの労働時間
労働者雇用総数
$\mathbb{tb}\,N$
$\mathbb{t}\{\mathbb{x}-(\mathbb{A}\mathbb{x}+\mathbb{b}\tau\mathbb{x})\}$
$=(1-\mathbb{tb})\,N$
$\mathbb{tb}$
$1-\mathbb{tb}$
$\mathbb{tb}\,N$
賃金財を直接・間接に生産している労働者
$\mathbb{tb}$
$1-\mathbb{tb}$
$\mathbb{t}\{\mathbb{x}-(\mathbb{A}\mathbb{x}+\mathbb{b}\tau\mathbb{x})\}$
$=(1-\mathbb{tb})\,N$
剰余生産物を直接・間接に生産している労働者