# 応用経済研究：講義ノート

## 6/21：第 10 回目

前回の復習を兼ねて、いわゆるフロベニウスの定理について述べておく。$\mathbb{D} \geq \mathbf{0}$ において、$\mathbb{D}$ は非負の固有値を持ち、その中で最大のものをフロベニウス根という。そして、フロベニウス根に対応する非負の固有ベクトル（フロベニウス・ベクトル）が存在する。

$$\frac{1}{1+r}\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbb{D}$$

$r$ は均等利潤率を表している。このとき $\frac{1}{1+r}(\geq 0)$ はフロベニウス根である。また $\mathbf{p}(\geq \mathbf{0})$ はフロベニウス・ベクトルである。$\mathbb{D} \geq 0$ かつ分解不能ならば、それぞれフロベニウス根は正、フロベニウス・ベクトルは正ベクトルとなる。

続いて、生産価格と投下労働価値の関係を考察する。生産価格と投下労働価値は一般には比例しないが、$r = 0$ のときには比例する。

$$\begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{t}\mathbb{A} + \tau \\ \mathbf{p} = (1+r)(\mathbf{p}\mathbb{A} + w\tau) \end{cases}$$

$r = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}\mathbb{A} + w\tau \\ \mathbf{p}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) &= w\tau \\ \mathbf{p} &= w\tau(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \\ \mathbf{p} &= w\mathbf{t} \end{aligned}$$

となり、比例する。また、$r > 0$ のときでも生産の有機的構成が均等であれば、同様に比例する。以下では、置塩 (1977) の第 3 章での証明をみる。
(証明)
生産の有機的構成を次のようにおく。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i a_{ij}}{\tau_j}$$

分子は第 $j$ 部門の生産に間接的に必要な労働を、分母は第 $j$ 部門の生産に直接必要な労働を意味している。$t_j = \sum_{i=1}^{n} t_i a_{ij} + \tau_j$ だから、$\frac{t_j - \tau_j}{\tau_j} = \frac{t_j}{\tau_j} - 1$ である。有機的構成が均等であることから $\mathbf{t} = k\tau$、ただし $k$ はスカラー。

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (1+r)(\mathbf{p}\mathbb{A} + w\tau) \\ \frac{\mathbf{p}}{w} &= (1+r)(\frac{\mathbf{p}}{w}\mathbb{A} + \tau) \end{aligned}$$

ここで、$\frac{\mathbf{p}}{w} = \mathbf{q}$ とおくと、

$$\mathbf{q} = (1+r)(\mathbf{q}\mathbb{A} + \tau)$$

である。このとき証明すべきことは、$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{t} \iff \mathbf{t} = k\tau$ となる。まず $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{t} \Rightarrow t = k\tau$ について検討する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} = \lambda\mathbf{t} \rightarrow& \\
\frac{1}{1+r}\mathbf{q} &= \mathbf{q}\mathbb{A} + \tau \\
\frac{1}{1+r}\lambda\mathbf{t} &= \lambda\mathbf{t}\mathbb{A} + \lambda\tau + (1-\lambda)\tau \\
&= \lambda(\mathbf{t}\mathbb{A} + \tau) + (1-\lambda)\tau \\
&= \lambda\mathbf{t} + (1-\lambda)\tau \\
(\frac{1}{1+r} - 1)\lambda\mathbf{t} &= (1-\lambda)\tau \\
-\frac{r}{1+r}\lambda\mathbf{t} &= (1-\lambda)\tau \\
\mathbf{t} &= \frac{(1+r)(\lambda-1)}{r\lambda}\tau
\end{aligned}$$

続いて、$\mathbf{t} = k\tau \Rightarrow \mathbf{q} = \lambda\mathbf{t}$ についても検討する。

$$\mathbf{t} = k\tau \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+r}\mathbf{q} & = \mathbf{q}\mathbb{A} + \tau \\ \mathbf{t} & = \mathbf{t}\mathbb{A} + \tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+r}\mathbf{q} - \mathbf{t} &= (\mathbf{q} - \mathbf{t})\mathbb{A} \\
\frac{1}{1+r}\mathbf{q} - \frac{1}{1+r}\mathbf{t} - \frac{r}{1+r}\mathbf{t} &= (\mathbf{q} - \mathbf{t})\mathbb{A} \\
\frac{1}{1+r}(\mathbf{q} - \mathbf{t}) &= (\mathbf{q} - \mathbf{t})\mathbb{A} + \frac{r}{1+r}\mathbf{t} \\
\frac{1}{1+r}(\mathbf{q} - \mathbf{t}) &= (\mathbf{q} - \mathbf{t})\mathbb{A} + \frac{rk}{1+r}\tau
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{t}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{q}}\mathbb{A} + \frac{rk}{1+r}\tau \\
\frac{1}{1+r}\frac{1+r}{rk}\tilde{\mathbf{q}} &= \frac{1+r}{rk}\tilde{\mathbf{q}}\mathbb{A} + \tau
\end{aligned}$$

$\frac{1+r}{rk}\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1+r}{rk}(\mathbf{q} - \mathbf{t}) = \mathbf{q}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} - \mathbf{t} &= \frac{rk}{1+r}\mathbf{q} \\
\mathbf{t} &= \left(1 - \frac{rk}{1+r}\right)\mathbf{q} \\
\mathbf{t} &= \frac{1+r-rk}{1+r}\mathbf{q} \\
\mathbf{q} &= \frac{1+r}{1+r-rk}\mathbf{t} \\
\mathbf{q} &= \frac{1+r}{1-\frac{r}{1+r}k}\mathbf{t}
\end{aligned}$$

以上。

続いて、総計一致二命題の成立に関しての考察を行う。総計一致二命題とは、全生産物の総価値と総価格とが等しくなることと、同時に総剰余価値と総利潤が等しくなることである。ここで、第 $i$ 商品 1 単位の剰余価値を $\tau_j - \mathbf{tb}\tau_j$ としたとき、総剰余価値は次のようになる。

$$\begin{aligned}(1-\mathbf{tb})\tau\mathbf{x} &= \tau\mathbf{x} - \mathbf{tb}\tau\mathbf{x} \\ &= \tau(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbf{x} - \mathbf{tb}\tau\mathbf{x} \\ &= \mathbf{t}(\mathbb{I}-\mathbb{A})\mathbf{x} - \mathbf{tb}\tau\mathbf{x} \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{x} - \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\tau\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{tm}\end{aligned}$$

ただし $\mathbf{x} - \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\tau\mathbf{x}$ を剰余生産物 $\mathbf{m}$ としている。次に総利潤をみると、

$$\begin{aligned}(\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbb{A} - \mathbf{pb}\tau)\mathbf{x} &= \mathbf{p}(\mathbb{I} - \mathbb{A} - \mathbf{b}\tau)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{pm}\end{aligned}$$

以上よりまとめると、

- 総価値=総価格：$\mathbf{tx} = \mathbf{px}$
- 総剰余価値=総利潤：$\mathbf{tm} = \mathbf{pm}$

である。

## 6/28：第 11 回目

総計一致二命題

- 総価値=総価格：$\mathbf{tx} = \mathbf{px}$
- 総剰余価値=総利潤：$\mathbf{tm} = \mathbf{pm}$

より、総価値=総価格に関しては

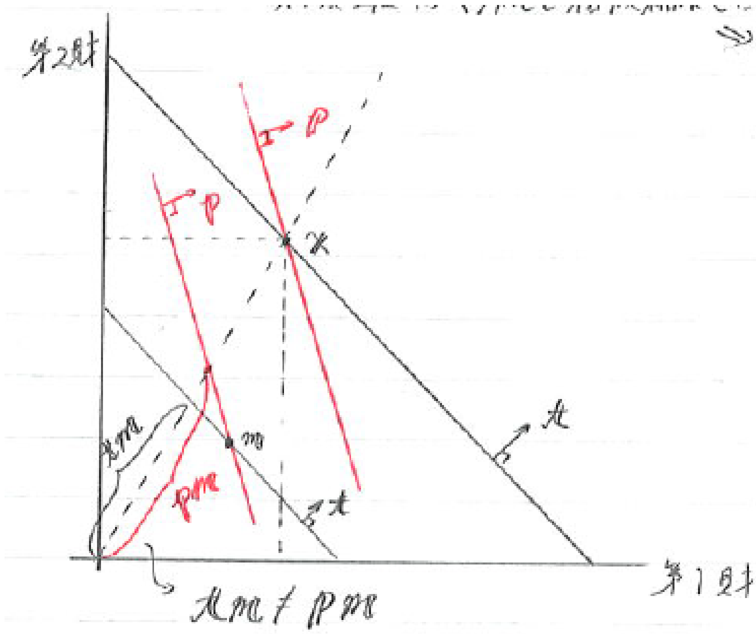
$$1 = \mathbf{p}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{tx}}$$

とかけ、これは投下労働 1 単位当たりに総生産物を相似縮小したバスケットをニュメレールとしていることを意味している。他方、総剰余価値=総利潤については、

$$1 = \mathbf{p}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{tm}}$$

であり、これは投下労働 1 単位になるように剰余生産物ベクトルを相似縮小したバスケットをニュメレールとしていることを意味する。この 2 式が両立しないことは以下の各図によって明らかである。

[1 図]

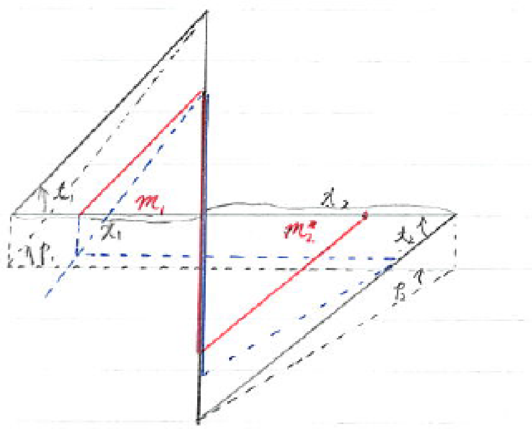



2 財モデルを考えると、

$$t_1x_1 + t_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_2$$
$$t_1m_1 + t_2m_2 = p_1m_1 + p_2m_2$$

が両立しないことを [2 図] のようにも描ける。

[2 図]



総計一致二命題が両立するときは、均斉成長の場合である。つまり、生産ベクトルとしてフロベニウス・ベクトル $\mathbf{x}_*$ を用いるということである。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_* &= \mathbf{x}_* - \mathbb{D}\mathbf{x}_* \\ &= \mathbf{x}_* - \frac{1}{1+g}\mathbf{x}_* \\ &= \frac{g}{1+g}\mathbf{x}_*\end{aligned}$$

とすると、任意の評価ベクトル $\mathbf{v} > 0$ について、

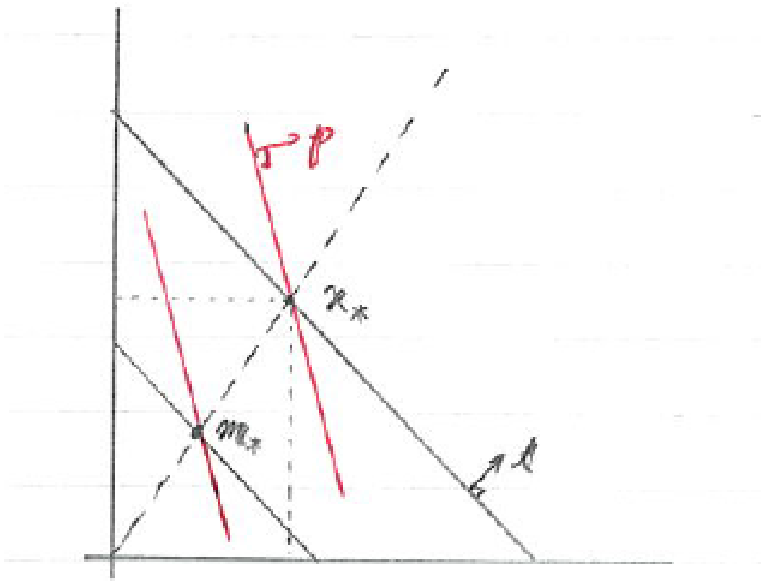
$$\mathbf{vm}_* = \frac{g}{1+g}\mathbf{vx}_*$$

$\mathbf{tx}_* = \mathbf{px}_*$ なら

$$\mathbf{t}\frac{g}{1+g}\mathbf{x}_* = \mathbf{p}\frac{g}{1+g}\mathbf{x}_*$$
$$\mathbf{tm}_* = \mathbf{pm}_*$$

となり両立する。幾何的には [3 図] を参照。

[3 図]




ここまでの内容を踏まえて、単一体系派と呼ばれる学派の価値の捉え方について整理しておくと、以下のように書ける。

$$1 = \mathbf{p}\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{ty}} = \mathbf{p}\frac{\mathbf{y}}{N}$$

つまり、世界の純生産物を労働 1 単位あたりの生産バスケットに相似縮小し、これをニュメレールとしている。このとき、現実の相対価格は完全に維持されており、名数が労働時間に変換されているだけだとみなすことができる。