大瀧雅之『動学的一般均衡のマクロ経済学』第４章第４節のモデルの検討

松尾 匡

I　はじめに

東京大学の大瀧雅之教授が2005年に東京大学出版会から出された著書『動学的一般均衡のマクロ経済学――有効需要と貨幣の理論』(以下、本書と略)は良著である。小野善康(1992)の登場以来、現代の主流派経済学の方法である動学的一般均衡の枠組みに則って、ケインズ的な有効需要不足による不況の状況を分析する研究がなされるようになっている。本書はその最先端の研究のひとつをまとめたものとして学術的価値が高い。と同時に、これから動学的一般均衡理論を学ぼうという大学院生にとっては、格好の入門書になっている。特に、第３章の「マクロ経済動学にとっての基本的数学トゥール」と、第５章の文献紹介「経済学の基礎を学ぶ」は有益だろう。

ところで、動学的一般均衡を用いる今日的なケインズ理論は、ケインズ的状況が生じる本質を「流動性選好」に見ている。従来、ケインズ的状況が生じる原因と考えられてきた様々な事柄――貨幣賃金率の下方硬直性や価格硬直性、技術の固定性、人々の予想や選択の非合理性等々――は、実は本質的なことではなくて、これらのことが一切ない主流派新古典派経済学と全く同じ枠組みのもとでも、ただ流動性選好を考慮に入れるだけでケインズ的状況は生じるのだというのが今日的研究の主張したい力点である。

とはいえ、小野善康(1992)でも、第８章のモデル以外のモデルでは、価格の粘着性が仮定されていた。本書の第２章で提示されているメインモデルでも、労使の団体交渉による貨幣賃金率決定や、独占的競争を前提に入れている。しかし、労働者が無権利で市場が競争的だった19世紀にも、不況がなかったわけではもちろんない。労組の交渉力も競争制限もない純粋な資本主義経済の本質的特徴から、すでに有効需要不足による不況がもたらされるはずである。

その点からすると、完全競争の仮定の下に分析されている本書第４章のモデルこそ、ケインズ理論の神髄を表すにふさわしいものである。うち第２節のモデルは、貨幣以外に貯蓄手段がなく、しかも実質貨幣供給一定の貨幣発行ルールがあるために、ルーカスモデルと対比するというモデルの本来の意図は理解できるものの、ケインズ的特徴を無理矢理出している印象がある。それに対して第４節のモデルは、不確実性のもとでの貨幣と危険資産との代替を考慮に入

れ、必要にして最小限のシンプルな前提から、合理的期待下の動学的一般均衡下での流動性選好のマクロ的性質を導き出そうとしている極めて優れたモデルである。

しかし、本書のモデルの展開には、結論に影響はないが無視し得ないミスがある。しかも、このモデルのケインズ的特徴をとらえた展開を十分に行っているとは言えない。実はこのモデルからは著者の意図を超えて、もっとケインズ的な結論が導かれるのである。

本稿はこれを示し、大方の批判をあおぎたい。

II　本稿で検討する大瀧教授のモデル

では、本書第４章第４節のモデルを紹介しよう。式番号はもとのものをそのまま用いる。まず個人の効用関数は次のように定式化される。

$$U(c_1, c_2)\equiv -\exp(-\alpha c_1)-E_t(\exp(-\alpha c_2)). \tag{4.30}$$

c_1は「若年時」の、c_2は「老年時」の消費量を表している。E_tは、第 t 期に利用可能な情報のもとでの条件付き期待値である。$-\exp(-\alpha c)$は、絶対的危険回避度が一定値$\alpha > 0$をとる効用関数である。

家計の価値保蔵手段には、貨幣と「資本」がある。資本は危険資産で、来期に生産に用いられてその期の間に完全に減耗する。このとき各個人の予算制約式は次のようになる。

$$c_1 + s \leqq \omega,\quad s + k + \frac{M_1}{p_1}, \tag{4.31}$$

$$c_2 \leqq (1+\tilde{\rho})k + \frac{M_1}{p_2}. \tag{4.32}$$

s は若年期の貯蓄を、ωは実質賃金率を、p_1、p_2はそれぞれ若年時、老年時の財価格を、M_1は若年時の貨幣需要を表す。$\tilde{\rho}$は、資本の利潤率である。もともとの記号では、$1+\tilde{\rho}$を$\tilde{r}$と表現し、以下すべて$\tilde{r}$を使って記述しているが、記述の簡単化のために改めた。これは、今期においては確率変数である。

大瀧教授は、k を「資本の需要量」と表現している。ここから、資本は生産要素として家計から企業に「供給」されるものではなく、むしろ企業の所有権が各個人にあって、各個人から提供された資本はすべて生産に利用されるものと解釈すべきことがわかる。すなわち、資本市場は存在しない。この解釈は、約定される利子率がなく、資本収益の変動をすべて個人が引き受けている想定と

整合的である。

さて、教授は(4. 32)をM_1について解いて(4.31)に代入[1]し、「複数均衡問題を本質的でないと考え」て、価格定常、すなわち$p_1 = p_2$を仮定する。すると、生涯を通じた予算制約式が次のように得られる。

$$c_2 \leqq \omega + \tilde{\rho}k - c_1 \tag{4.34}$$

各個人は、(4. 34)の制約のもとでc_1、c_2、kを選択して(4. 30)を最大化する問題を解くことになる。以下では(4. 34)は実質的には等号で成り立つものとして展開している。

次に企業についての想定である。企業は、次のような一次同次の生産関数を持っているとされている。

$$Y_2 = f\left(\frac{K_1}{L_2}\right)L_2 + (1 + \tilde{u}_1)K_1, \qquad f' > 0, \quad f'' < 0. \tag{4.35}$$

ここで、$\tilde{u}_1$は、「正の確率で負値をとるが生産量Y_2を決して負にすることのない独立で同一な過程に従う確率変数」とされている。上式を雇用量 L_2で割って一人当たりの生産量y_2に書き直すと、

$$y_2 = f(k) + (1 + \tilde{u}_1)k. \tag{4.36}$$

と表される。さらに、企業は、「来期$\tilde{u}_1$の値が既知となったときに生産を実施する」として、利潤の最大化条件から次の関係を導く。

$$\tilde{\rho} = f'(k) + \tilde{u}_1, \qquad \omega = f(k) - k f'(k). \tag{4.37}$$

このような定式はありふれているのでつい読み流してしまうが、ここでの教授の想定では資本レンタル市場がないことを思い出してほしい。したがって、(4. 37)の右の式が、市場で与えられた実質賃金率のもとでkの最適決定を表し、左の式はそのkのもとでの残余として利潤率$\tilde{\rho}$が決まる式と読むべきである。

さて、以上の準備のもとに、モデルを解く。(4. 34)を等式にして効用関数(4. 30)に代入してc_2を消去し、c_1とkで微分してゼロとおくと、それぞれ次のように最適化の一階条件が求まる。

$$\exp(-\alpha c_1) = \int \exp[-\alpha(\omega + \tilde{\rho}k - c_1)]\, \mathrm{d}F(\tilde{u}_1), \tag{4.38}$$

$$\int \tilde{\rho} \exp[-\alpha(\omega + \tilde{\rho}k - c_1)]\, \mathrm{d}F(\tilde{u}_1) = 0. \tag{4.39}$$

ここで、Fは$\tilde{u}_1$の分布関数である。大瀧教授は、この二式をさらに変形はしていないが、確率変数ではないものは積分記号の外に出して、それぞれ次のように

簡潔にしておくのが便利である。

$$\exp[\alpha(\omega - 2c_1)] = \int \exp(-\alpha\ \tilde{\rho}k)\ \mathrm{d}F(\tilde{u}_1), \tag{4.38'}$$

$$\int \tilde{\rho}\exp(-\alpha\ \tilde{\rho}k)\ \mathrm{d}F(\tilde{u}_1) = 0. \tag{4.39'}$$

III　グラフ導出のミス

さて大瀧教授は次に、「市場均衡」について考察するとして、個人の最適化条件(4.38)(4.39)と、企業の最適化条件(4.37)を同時に満たす状態を求める。すなわち、(4.37)の$\tilde{\rho}$とωを(4.38)(4.39)にそれぞれ代入して、次の式を出す。

$$\exp(-2\alpha c_1) = \int \exp[-\alpha(f(k) + \tilde{u}_1 k)]\ \mathrm{d}F(\tilde{u}_1), \tag{4.40}$$

$$\int \left(f'(k) + \tilde{u}_1\right)\exp[-\alpha(f(k) + \tilde{u}_1 k - c_1)]\ \mathrm{d}F(\tilde{u}_1) = 0. \tag{4.41}$$

教授は、この両式をそれぞれ、横軸 k と縦軸 c_1の象限のグラフにかこうと試みている。しかしその導出にはミスがある。

まず(4.40)のグラフを出すために、(4.40)を全微分して次のような式[2]を出している。

$$-2\exp(-2\alpha c_1)\ \mathrm{d}c_1 = \left[\int \left(f'(k) + \tilde{u}_1\right)\exp[-\alpha(f(k) + \tilde{u}_1 k - c_1)]\ \mathrm{d}F(\tilde{u}_1)\right] \mathrm{d}k$$

ここで教授は、右辺〔〕の中身は(4.41)の左辺と同じであることから、ここは(4.41)によって０であると考え、(4.40)のグラフは水平であると結論する。

しかし、(4.40)のグラフは元来、(4.41)の成立にかかわらず、(4.40)だけを満たす k と c_1の関係を表す曲線であるはずで、ただ(4.41)のグラフとの交点においてのみ両式の両立が成り立つものである。したがって、(4.40)のグラフの傾きが水平になるのは、あくまで(4.41)との交点の話であって、グラフ全体の形状を求める時に(4.41)と連立させるのは適当ではない。実は(4.40)のグラフは、(4.41)のグラフとの交点を頂点とする逆Ｕ字型になる。

また、次に教授は、(4.41)のグラフを求めるために、(4.41)を k と c_1で全微分した上で、$\mathrm{d}c_1$のかかっている部分をなぜか「正である」として、右上がりの(4.41)のグラフを出している。しかし、実はこの $\mathrm{d}c_1$のかかっている部分こそ(4.41)の左辺そのものであり、(4.41)が成立するもとでは０である。したがって、(4.41)のグ

ラフは垂直線になる。

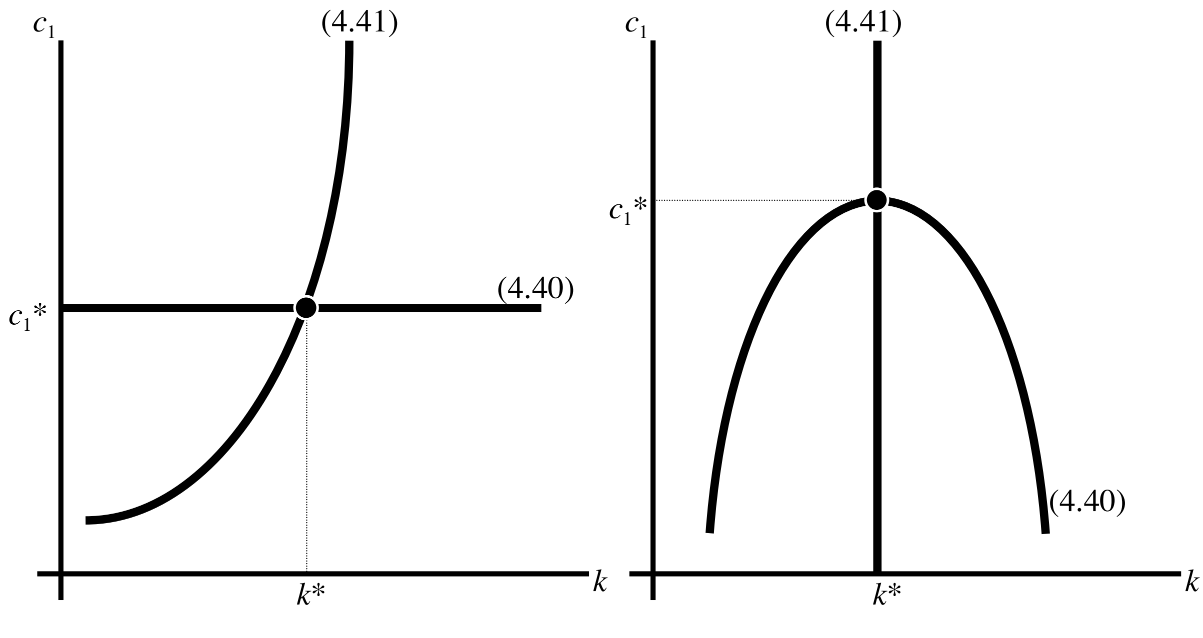
これは考えてみれば当然で、(4.41)の左辺で確率変数でないものを積分記号の外に出せば、消去されるので次のようになる。

$$\int \left(f'(k) + \tilde{u}_1 \right) \exp(-\alpha\, \tilde{u}_1 k)\, \mathrm{d}F(\tilde{u}_1) = 0. \qquad (4.41)'$$

すなわち、これは k だけの関数なので、k はここだけで決まってしまう。グラフにすれば当然垂直線になる。

それゆえ、本書に示された図は図１左図のようなものであるが、本当は図１右図のようになる。

図　1



これをわかりやすく見るために、$\tilde{u}_1$ が平均０、分散 σ^2 の正規分布に従うものとして、解を求めてみよう。これは厳密に言えば、生産量を「決して負にすることのない」という大瀧教授の仮定には反しているのだが、そのような可能性が無視できるくらい十分分散が小さいものとする。

この仮定のもとでは、(4. 40) は次のようになる。

$$\exp(-2\,\alpha\, c_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha\,(f(k) + \tilde{u}_1 k)]\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\tilde{u}_1^{\,2}}{\sigma^2} \right) \mathrm{d}\,\tilde{u}_1, \qquad (1)$$

これを解くと次のようになる（詳細は［数学付録Ａ］参照)。

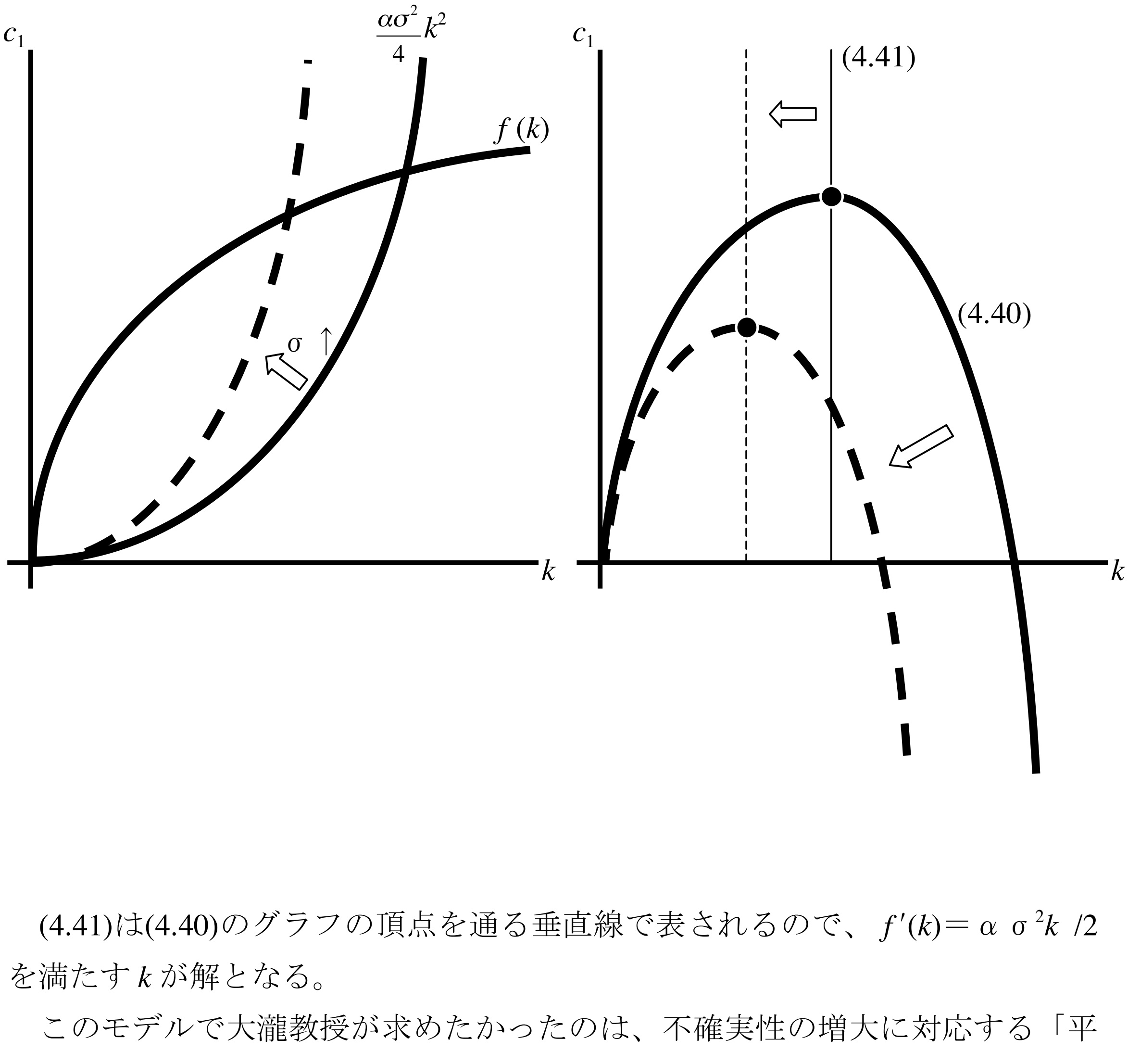
$$\exp(-2\alpha c_1) = \exp[-\alpha f(k) + \alpha^2\sigma^2 k^2/4]$$

よって、

$$c_1 = \frac{1}{2}\left[f(k) - \frac{\alpha\sigma^2}{4}k^2\right] \qquad (2)$$

$f(k)$と$(\alpha\sigma^2/4)k^2$のグラフは図２左図実線のようにかけるので、両者の差をとって、(4.40)のグラフが右図太実線のようにかける。

図　２



(4.41)は(4.40)のグラフの頂点を通る垂直線で表されるので、$f'(k) = \alpha\sigma^2 k/2$を満たす$k$が解となる。

このモデルで大瀧教授が求めたかったのは、不確実性の増大に対応する「平均保存拡散」の効果である。これは、今の例では、σの増大として表すことができる。この場合、図２左図の$(\alpha\sigma^2/4)k^2$のグラフが破線のようにシフトするので、(4.40)のグラフは図２右図の破線のグラフのようにシフトする。それゆえ、

図から明らかな通り、均衡の c_1*、k*が共に低下する。これは、教授の出した結果と結論的には同じである。

IV　物価の変化を考慮に入れた場合

さて、先述した通り、大瀧教授は「本質的でない」という理由により、時間を通じた価格変動を捨象している。しかし、これを考慮に入れると、どのようなことが言えるだろうか。

p_1、p_2を区別した、生涯を通じた予算制約式は、本書206ページの(4.33)に示されているが、これは、c_1とc_2が入れ替わるミス表記をしている。また、本稿の利潤率の表記$\tilde{\rho}$は、教授の利潤率の表記$\tilde{r}$との間で、前節までは$\tilde{r}=1+\tilde{\rho}$という単純な関係が成り立つように定義したが、以降p_1、p_2を区別したケースではもう少し複雑な関係になるような定義にしたい。というのは、教授の利潤率は、産出時点価格で資本を評価しているので、第2期の粗利潤額／p_2K_1と定義されている。しかしこれは扱いにくいので、我々は投入時点価格で資本を評価して利潤率を定義することにする。すなわち、第2期の貨幣賃金率をw_2とすると、

$$\tilde{\rho}=(p_2y_2-w_2)／p_1K_1-1.$$

と定義した$\tilde{\rho}$を使うことにする。また$\tilde{\rho}$の期待値をρと表記する。

すると、(4.33)式にあたる、生涯を通じた予算制約式は、次のようになる。

$$c_1+\pi c_2 \leqq \omega+\tilde{\rho}k. \qquad (3)$$

ただし、$\pi \equiv p_2/p_1$である。

また、企業の利潤最大化より、

$$1+\tilde{\rho}=\pi(f'(k)+1+\tilde{u}_1).$$

この両辺の期待値をとると、

$$\rho=\pi(f'(k)+1)-1. \qquad (4)$$

となる。

家計の最適化は、(3)をc_2について解いて(最大化なので等号に直して)、(4.30)式に代入した、

$$U=-\exp(-\alpha c_1)-E_t[\exp\{-\alpha(\omega+\tilde{\rho}k-c_1)/\pi\}].$$

をc_1とkについて最大化すればよい。

なお前節の計算では、あらかじめ企業の最適化計算の結果を代入した上で、この家計の最適化問題を解いた。前節では価格も不変な定常均衡を検討したのでそれでよかった。しかし本節では、価格が毎期変動するために、kもそれに合

わせて変動する可能性がある。すると、ω はこの計画を立てる時点の前期に決定された k によって決まっているので、ここではこの計画によって決定される k とは切り離して、所与として扱わなければならない。

　しかし、これを一般的に解いても見通しがよくないので、前節同様、$\tilde{u}_1$ が平均０、分散 σ^2 の正規分布に従うものとして解くことにする。すると、U は次のように変形される（詳細は[数学付録Ｂ]参照）。

$$U = -\exp(-\alpha c_1) - \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi}\left(\omega - c_1 + \rho k - \frac{\alpha\sigma^2}{4\pi}k^2\right)\right]. \qquad (5)$$

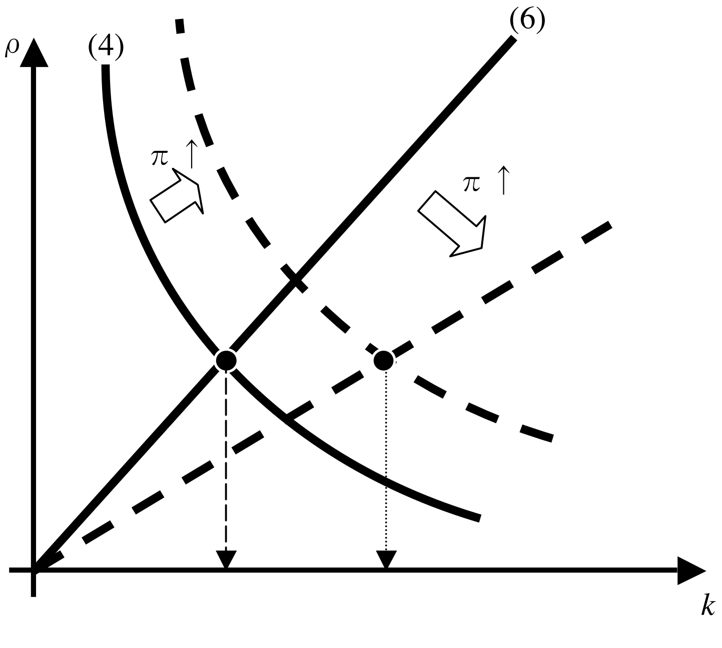
これを、k で微分して０とおくと、次の式が得られる。

$$\rho = \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi}k. \qquad (6)$$

ここから、最適な k が $k = \dfrac{2\pi}{\alpha\sigma^2}\rho$ と求められる。

　(4)式と(6)式を、縦軸に ρ 、横軸に k をとったグラフにかくと、図３のようになり、交点で均衡の k と ρ が定まる。このとき、π が増えた場合、すなわち物価上昇率が大きくなった場合、グラフは破線のようにシフトするので、均衡の k は上昇する。不確実性の増大に対応する σ の増大があった場合は、(4)式のグラフは不変で、(6)式のグラフの傾きが大きくなるので、均衡の ρ は増え、k は減る。以降この均衡の k を k^* とする。

図　３



よって、

$$k^* = k^*(\pi, \sigma), \quad k^*_{\pi} > 0, k^*_{\sigma} < 0. \tag{7}$$

なお我々は、生産関数 $f(K/L)L$ の代替の弾力性が、通常のモデルにおける資本分配率にあたる、生産弾力性 $f'k/f$ よりも大きいならば、十分に、$d\rho^*/d\pi > 0$、$d(\rho^* k^*)/d\sigma < 0$ となることを確認できる（詳細は［数学付録Ｃ］参照）。例えばコブ・ダグラス型生産関数ならば、代替の弾力性は１なので、この条件を十分に満たす。

次に(5)に(6)を代入して、c_1で微分して０とおくと、最適な c_1が次のように求められる。

$$c_1 = \frac{\alpha(\omega + \frac{1}{2}\rho k) + \pi \log \pi}{\alpha(1-\pi)}$$

このうち、ρk は次期得られる期待収益であり、(4)(6)式より、今期立てる計画における π と σ の関数である。ω は、前期決定された k によって決まるので、前期の π と σ の関数である。したがって、均衡の c_1は（σ はパラメータなので時間を通じて不変とすると）、次のように書ける。

$$c_1{}^*_t = c_1{}^*(\pi_t, \pi_{t-1}, \sigma), \quad c_1{}^*_{\pi_t} > 0, c_1{}^*_{\pi_{t-1}} > 0, c_1{}^*_{\sigma} < 0. \tag{8}$$

ただし、偏微係数の符号条件の一番と三番は、上記の代替の弾力性が生産の弾力性より大きい条件を満たした場合に十分成り立つ。二番目は必ず成り立つもので、ω が前期決定した k の増加関数であり、前期決定した k は前期の π の増加関数であることから容易に導かれる。

なお、このモデルの財市場の均衡は次のようなものになる。家計の決定時点を添字の二番目で表記することにすると、一人当たりの財の生産量 $y_{2,t}$は、前期において決まった k の関数であり、それは前期の π の関数である。すなわち、$y_{2,t} = y_2(\pi_{t-1}), y_2' > 0$ である。需要側にはまず、c_1と k があるが、それぞれ(8)(7)式が入るので、π_t と π_{t-1}の関数になる。さらに、前期に決定された老年期消費 $c_{2,t-1}$が加わる。これは、前期の ω と c_1と k および今期の利潤から計算されるが、今期の利潤は前期決定された k で決まるので π_{t-1}の関数である。前期の c_1は、π_{t-1}と π_{t-2}の関数、前期の ω はそのさらに前の期の k で決まるので、π_{t-2}の関数である。したがって、財市場均衡式は、π に関する二階の差分方程式となる。

この運動および複数均衡の可能性についてはまだ検討できていないが、定常均衡のひとつが $\pi = 1$ であることは言うまでもない。

ところで、この財市場均衡が破れた場合はどうなるだろうか。例えば、今期急に σ が上昇した場合を考えてみよう。供給 $y_{2,t}$ と、需要のうちの $c_{2,t-1}$ は、ともに前期の決定でさしあたり与えられている。他方で k が低下し、上述の条件の元手は c_1 も低下する。したがって、財市場に超過供給が生じる。

このとき、予算制約式より、余り無く消費するなら、$c_{2,t-1} = \pi_{t-1}(1 + \tilde{\rho}(k_{t-1}))k_{t-1} + M_{t-1}/p_t$ である。k_{t-1} は π_{t-1} の関数なので不変であるが、p_t が下落すれば実質貨幣残高が増えて $c_{2,t-1}$ が増加する。また、p_{t+1} の予想が不変のもとで p_t が下落すれば π_t が上昇することにより、c_1 と k も増加する。よって、財の超過供給にあわせて今期の価格がスムーズに下落すれば財市場の均衡は回復する。

ただし、今期の価格の下落がスムーズではなくて、次期にまでその下落が及ぶと予想されたならば、c_1 と k はかえって減少するので、調整は逆に働くかもしれない。この場合は、p_{t+1} の予想を引き上げる政策が有効性を持つ。

---

[1] 205 ページ最下行の「(4.32)」はタイプミスであろう。

[2] 右辺の exp の中身に α が抜けている。